Zwei Lösungswege für eine Gleichung – Wozu eigentlich? Aus der laufenden Studie „MathFlex"

Christian Hämmerle, Christian Rüede und Fritz Staub

Zur Studie

Die aktuell laufende Studie MathFlex[1] widmet sich einem ausgewählten Bereich des Algebraunterrichts der Sekundarstufe 2. Die Projektleitung basiert auf der Kooperation zwischen einem Fachdidaktiker (PD Dr. Christian Rüede, Fachhochschule Nordwestschweiz) und einem Lehr-Lernforscher (Prof. Dr. Fritz Staub, Universität Zürich). Die Algebra wurde gewählt, weil sie als besonders zentrales Fundament für die ihr folgende Mathematik und weiterer Wissenschaften gilt.

Herausforderungen für die Vermittlung von algebraischem Wissen und Können erörtern wir im Folgenden exemplarisch anhand eines Algebraleistungstests zu quadratischen Gleichungen aus der MathFlex-Studie. Ohne auf die Studie insgesamt einzugehen, wollen wir damit unsere Vorstellung eines wirksamen Algebraunterrichts darstellen, wie wir ihn im Rahmen der Studie zu entwickeln und evaluieren suchen.

Bisher sind 34 verschiedene Maturitätsklassen aus 11 deutschschweizerischen Kantonen an der Studie beteiligt. Im Folgenden beziehen wir uns auf Erhebungen, welche in 8 dieser Klassen von Lehrpersonen ohne vorausgegangene Weiterbildung direkt nach einer Unterrichtseinheit zu quadratischen Gleichungen erfolgten. Die Länge der Unterrichtseinheit und das minimale Lernziel waren standardisiert: Der Algebraunterricht schloss in jeder Klasse die Thematisierung von Quadratwurzeln, die Einführung einer Auflösungsformel für quadratische Gleichungen sowie die Diskussion der Anzahl Lösungen einer quadratischen Gleichung ein. Die Setzung der konkreten Inhalte und Unterrichtsmethoden blieb hingegen den Lehrpersonen vorbehalten. In einem nicht notenrelevanten Test waren unter anderem Gleichungen der folgenden Art möglichst schnell zu lösen:

a) $x - x(3x + 4) = 5 - x(3x + 4)$

b) $(x - 3)^2 = 25$

Eine erste Analyse der Lösungen von 134 Schülerinnen und Schülern aus 5 Gymnasial- und 3 Fachmittelschulklassen zeigt, dass die Gleichung a) von rund einem Drittel und die Gleichung b) von der Hälfte der Schülerinnen und Schüler nicht richtig gelöst werden konnte. Dies erstaunt, da die Lösungen „einfach zu sehen" wären und die algebraische Struktur der zweiten Gleichung im Rahmen der quadratischen Ergänzung im Unterricht vorgekommen ist. Eine zusätzliche Analyse der angewandten Lösungsmethoden zeigt weiter, dass viele Schülerinnen und Schüler in einem ersten Schritt ausmultipliziert haben: 90% bei der Gleichung a) und gut 50% bei der Gleichung b).

[1] MathFlex ist das Akronym für das vom Schweizerischen Nationalfond finanzierte Projekt 100019_162686 / 1 mit dem Titel „Förderung von algebraischer Flexibilität. Wirkungen von Weiterbildungen zum Vergleichen von Lösungswegen im gymnasialen Mathematikunterricht".

Mit diesem Schritt beschreiten die Schülerinnen und Schüler einen gewohnten, vermeintlich sicheren Weg. Von Sicherheit kann jedoch keine Rede sein: Von denjenigen, die zuerst ausmultiplizieren, findet für die Gleichung a) ein Drittel keine richtige Lösung, für die Gleichung b) sogar zwei Drittel.

Mangelndes algebraisches Verständnis der Schülerinnen und Schüler

Zur Lösung von Gleichung a) mit der Äquivalenzumformung „$+x(3x-4)$" zu operieren oder für die Lösung von Gleichung b) das Wurzelziehen und die Fallunterscheidung zu nutzen, kommt in den Lösungswegen der Schülerinnen und Schüler kaum vor. Es dominiert die Strategie des Ausmultiplizierens. Die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler kann die in den Gleichungen vorkommenden Terme wie $x(3x+4)$ oder $(x-3)^2$ nur als „Rechnungen" interpretieren und rechnen diese gemäss den (bereits auf der Sekundarstufe 1) erlernten Automatismen aus. Die Reduktion der Interpretation eines algebraischen Ausdrucks auf eine unmittelbar auszuführende Handlung wie in diesem Fall „Multipliziere aus!" ist aus mathematischer Perspektive eine starke Einschränkung des algebraischen Verständnisses.

90% der Schülerinnen und Schüler nehmen also die Bedeutung der gleichen Summanden $-x(3x+4)$ nicht wahr, sondern rechnen aus, was sie ausrechnen können. Dieses Interpretieren von Termen als Rechnungen ist Ausdruck eines mangelnden Verständnisses allgemeiner mathematischer Gesetze und Regeln. Beispielsweise ist aus mathematischer Sicht das Ausmultiplizieren von $-x(3x+4)$ eine Anwendung des Distributivgesetzes $a(b+c) = ab+ac$. Dieses Gesetz ist als Gleichheit formuliert, doch für 90% der Schülerinnen und Schüler ist das kaum eine Gleichheit. Für sie ist nämlich die linke Seite der Gleichung eine Rechnung, die rechte Seite das „sich ergebende" Resultat. Die beiden Seiten sind für diese Schülerinnen und Schüler wohl erst dann „gleich", wenn die linke Seite ausmultipliziert ist. Aus einer solchen Schülerperspektive ist das Distributivgesetz $a(b+c) = ab+ac$ eine einzelne Rechnung, keine Darstellung des allgemeinen distributiven Zusammenhangs und somit nicht handlungsleitend und daher unwichtig. Für diese Schülerinnen und Schüler ist die Mathematik eine Welt des Rechnens und Ausrechnens, wo sie doch eine Welt der Zusammenhänge und des Darstellens ist.

Es ist fraglich, ob eine Intensivierung des individuellen Übens dieses eingeschränkte algebraische Verständnis zu erweitern vermag. Denn zu einem grossen Teil dient das Üben in den gängigen Algebralehrmitteln der Schweiz der Automatisierung eines (!) Verfahrens zu einem (!) Gleichungstyp. Damit verfestigt sich aber das Fehlkonzept, eine Gleichung als Befehl aufzufassen, etwa die Gleichungen a) und b) als „Multipliziere aus!".

Multiple Lösungswege vergleichen

Um die Schülerinnen und Schüler zu einem verstehensorientierten Gleichungslösen zu führen, das mathematisches Wissen und Können verbindet, schlagen wir vor, im Klassengespräch Gleichungen zu diskutieren, bei der sich zwei (richtige) Lösungswege anbieten.

Denn zwei Lösungswege greifen zwei Interpretationen derselben Gleichung auf, mit denen sich die Schülerinnen und Schüler auseinandersetzen müssen. Die Gleichung wird zum Denkgegenstand. Im Klassengespräch können die beiden Interpretationen (mitsamt ihren Konsequenzen) kontrastiert werden, was die Charakteristika der einzelnen Interpretationen deutlicher macht und die damit verbundenen Konzepte ausführt. Dass das Aufzeigen multipler Interpretationen und somit multipler Lösungswege den Lernenden hilft, verstehensorientiert mit den Handwerkszeugen der Algebra umzugehen, konnte durch die amerikanische Forschergruppe um Rittle-Johnson und Star (2009) empirisch belegt werden. Folgend eine Aufgabe aus dem Bereich der linearen Gleichungen (ebd., S. 533):

Nathan's Solution:		**Patrick's Solution:**	
$5(y+1) = 3(y+1)+8$		$5(y+1) = 3(y+1)+8$	
$5y+5 = 3y+3+8$	*Distribute* __________	$2(y+1) = 8$	*Subtract* <u>*3(y + 1)*</u> *on Both*
$5y+5 = 3y+11$	*Combine* __________	$y+1 = 4$	*Divide* __________ *on Both*
$2y+5 = 11$	*Subtract* __________ *on Both*	$y = 3$	*Subtract* __________ *on Both*
$2y = 6$	*Subtract* __________ *on Both*		
$y = 3$	*Divide* __________ *on Both*		

Dieses Beispiel zeigt die zwei Lösungswege der Gleichung $5(y+1) = 3(y+1)+8$, von Nathan und Patrick. Während Nathan den Weg über das Ausmultiplizieren, Zusammenfassen und Isolieren der Variablen wählt, erkennt Patrick den identischen Klammerterm auf beiden Seiten der Gleichung. Der Vergleich der beiden Lösungswege legt das Hauptaugenmerk auf das mit dem Gleichungslösen verbundene konzeptuelle Wissen und nicht auf das individuelle Lösen der Gleichung.

Die Klasse muss die einzelnen Lösungswege zuerst verstehen, wozu in obigem Beispiel die zu füllenden Lücken für die Lösungsschritte dienen. Der Kern des Unterrichts bildet jedoch die Gegenüberstellung und der explizite Vergleich der beiden Lösungswege im Rahmen eines Klassengesprächs, das nach dem individuellen Studium der Lösungswege geführt werden kann. Gegenstand dieses Klassengesprächs müssten die beiden Interpretationen von $5(y+1) = 3(y+1)+8$ sein. Eine Leitfrage dazu könnte lauten: Was sieht Nathan bei der Gleichung, was Patrick? Mit Hilfe von Farben könnte im Unterricht die Interpretation in Patricks erster Zeile sowie die dazu passende Interpretation des Distributivgesetzes sichtbar gemacht werden. Bei Nathans Weg könnten analoge Färbungen hergestellt werden, um schliesslich durch Kontrastierung Gemeinsamkeiten und Unterschiede in Nathans und Patricks Interpretation zu verdeutlichen. Neben dem Sichtbarmachen und dem Kontrastieren der beiden Interpretationen lässt sich der Blick weiter auf die Lösungswege als Ganzes richten. Die Abfolge der Umformungsschritte beider Wege oder die unterschiedliche Länge der Lösungswege könnten thematisiert werden: Beurteile die Effizienz und den Schwierigkeitsgrad der beiden Lösungswege. Dabei lassen sich die Lösungsstrategien herausarbeiten, Übersichten erstellen, Vor- und Nachteile benennen, wo jeweils die eine oder andere Strategie einfacher ist. Interessant könnte es auch sein zu fragen, unter welchen Gegebenheiten die beiden Wege möglich und zielführend sind. Was passiert beispielsweise, wenn die Variable an einem anderen Ort steht (z. B. als Vorfaktor auftritt), ein anderer Klammerterm oder eine neue Variable eingeführt wird? Durch solche Fragen wird in der Besprechung mit der Klasse das Verstehen des Gleichungslösens aktiv gefördert, was erklären könnte, warum solche Vergleiche auf die algebraische Leistung einer Klasse lernförderlich wirkt.

Unsere Weiterbildung: Algebra und Klassengespräche

Unsere Hypothese ist, dass auch im deutschschweizerischen Kontext der Einsatz solcher Vergleiche von Lösungen für die Schülerinnen und Schüler eine Hilfe für den verstehensorientierten Umgang mit Termen und Gleichungen ist. Entscheidend für die Lernwirksamkeit solcher Aufgaben ist jedoch die Passung der zu vergleichenden Gleichungen und den zugehörigen Fragestellungen mit den Lernzielen und dem Vorwissen. Um diese klassenspezifische Passung zu fördern und zu unterstützen, ist im Rahmen von MathFlex eine Weiterbildung für Mathematiklehrpersonen entstanden, welche einerseits den Zweck und das Konzept solcher Vergleiche von Lösungswegen mit konkretem Unterrichtsmaterial aufzeigt, andererseits der Umsetzung im eigenen Unterricht im gegenseitigen Austausch und mit der Expertise der Leitenden gewidmet ist und auch den Transfer auf Bereiche wie Geometrie, Funktionen etc. unterstützt.

Vergleiche von Lösungswegen können sicher nicht alle Herausforderungen des Algebraunterrichts lösen. Aber sie stellen eine erwiesen lernwirksame Möglichkeit dar, wie verstehensorientiertes Gleichungslösen gestärkt werden kann. Indem Schülerinnen und Schüler algebraische Terme und Gleichungen nicht nur umformen, sondern auch besser lesen und verstehen lernen, wird das gefördert, was im Folgeunterricht die Grundlage der Algebra ausmacht: Das Interpretieren von Ausdrücken, Gleichungen und Formeln.

Literatur

Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2009). Compared with What? The Effects of Different Comparisons on Conceptual Knowledge and Procedural Flexibility for Equation Solving. *Journal of Educational Psychology, 101* (3), 529–544.

Interessierte an der Weiterbildung Algebra und Klassengespräche von MathFlex wenden sich per Mail bis zum 2.7. 2018 an christian.rueede@fhnw.ch.

Informationen zur Weiterbildung erhalten Sie unter

http://www.weiterbildung.uzh.ch/programme/wbmat_detail.php?angebnr=1274.

Wir freuen uns auf Ihre Teilnahme!