

Solitärwellen besser bekannt als perfekte Tsunamis

Meike Akveld, ETH Zürich, akveld@math.ethz.ch

Willi H. Hager, ETH Zürich, hager@vaw.baug.ethz.ch

Der untenstehende Text ist aus einer Zusammenarbeit zwischen einem Ingenieur und einer Mathematikerin entstanden. Wir haben versucht, ein interessantes physikalisches Phänomen mathematisch verständlich aufzubereiten. Die Mathematik geht über die Mittelschulmathematik hinaus, zeigt aber eine interessante und *echte* Anwendung von Differentialgleichungen. Wir haben den Text als Übungsblatt aufgebaut um lange Berechnungen wegzulassen. Eventuell lässt sich dieses Beispiel im Schwerpunkt- oder Ergänzungsfach behandeln.

1 Motivation

Die Einzelwelle oder Solitärwelle (Solitary wave) ist die stabilste aller Wasserwellen, da sie nur einen Wellenberg, jedoch keine Wellentäler besitzt. Sie entspricht einem Tsunami, falls dieser zweidimensional approximiert wird. Seit dem South-East Asia Tsunami Disaster von 2004 haben diese Wellen grosse Aufmerksamkeit erfahren, insbesondere infolge der immensen Schäden an Menschen sowie an Bauten längs der Küste. Weiter bekannt wurden Tsunamis durch das Fukushima-Unglück im Jahr 2011, welches nicht nur viele Menschen zu Schaden kommen liess, sondern zudem das AKW an der Nordostküste Japans zerstörte, begleitet von einem Austritt radioaktiver Schadstoffe. Dieses Unglück führte zu einer kritischen Überdenkung der weiteren Anwendung von Nuklearenergie; in der Schweiz ist der Austritt auf etwa 2030 geplant.

2 Geschichte

Die Solitärwelle wurde erstmals 1837 vom Engländer John Scott-Russell (1808-1882) beschrieben. Während eines Besuchs an einem der englischen Kanäle beobachtete er, wie eine Welle an einer Pferderaststätte sich weiter fortpflanzte, obwohl das Schiff zum Auswechseln der Pferde ruhte. Die eigenartige Wellenform weckte seine Aufmerksamkeit, er machte Messungen und veröffentlichte seine Resultate. Damit fand er das Interesse der Fachwelt, an der mathematischen Beschreibung dieser Welle zu arbeiten.



Abbildung 1: Gedenkstein John Scott Russell (1808-1882)

Es dauerte über 30 Jahre, bis schliesslich der Franzose Joseph V. Boussinesq (1842-1929) die Lösung 1872 publizierte. Er realisierte, dass dieses Phänomen durch die nicht-hydrostatische Druckverteilung des Abflusses massgebend beeinflusst wird, weshalb er die üblichen hydraulischen Gleichungen zu den sogenannten Boussinesq-Gleichungen verallgemeinerte. Die spezielle Lösung seiner Gleichung entspricht der 2D-Solitärwelle. Später wurde die Lösung durch die beiden Holländer Prof. Diederich J. Korteweg (1848-1941) und seinen Doktorand Gustav de Vries (1866-1934) verallgemeinert. In den 1960er Jahren wurde gezeigt, dass sich beliebige Wellen aus sogenannten Solitonen zusammensetzen, womit das Thema erneut Beachtung erhielt. Mit dem Wissen um die Gefahren von Tsunamis werden zukünftig grosse Forschungsaktivitäten erwartet.

3 Mathematische Beschreibung

Bekanntlich lassen sich Tsunamis auf offenem Meer praktisch nicht beobachten, da sie maximal höchstens etwa 10 m hoch sind, aber typische Wellenlängen von Hunderten von Kilometern besitzen. Ihr Gefahrenpotenzial entsteht erst beim Auflaufen in Küstennähe, wenn die abnehmende Tiefe des Meeresbodens die Welle zum Brechen (wave breaking) bringt. Es nähert sich der Küste dann eine fast vertikale Wasserwand, deren Höhe ein Vielfaches der ungestörten Wellenhöhe auf offenem Meer entspricht. Beim Auflaufen der Welle wird wie mit einem Hammer alles zerstört, insbesondere also die an der Küste gelegene Infrastruktur. Der Welle entkommt man nur, indem man sich auf eine nahe Anhöhe begibt.

Lässt man den Auflaufprozess ausser Acht, so ist die Solitärwelle sehr stabil, begleitet von praktisch keinen Energieverlusten, was sich an der fast globalen Ausbreitung solcher Wellen manifestiert. Dem zu Folge wird angenommen, dass die hydraulische Wellen-Energie nahezu konserviert wird. Nach dem Energiesatz entspricht die hydraulische Energiehöhe H mit g als Erdbeschleunigung der Summe aus Lagehöhe, Druckhöhe h und Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$. Die Energie wird in der Hydraulik deshalb üblicherweise durch eine Höhe ausgedrückt. Mit dem Durchfluss pro Einheitsbreite $q = h \cdot v$ findet man für einen Abfluss im horizontalen Rechteckkanal für das Oberflächenprofil der Solitärwelle (dabei wurde die Lagehöhe gleich 0 gesetzt)

$$H = h(x) + \frac{q^2}{2gh(x)^2} \left(1 + \frac{1}{3} \left(2h(x)h''(x) - h'(x)^2 \right) \dots \right)$$

Man beachte, dass der Term in der grossen Klammer einer Art Taylorreihe entspricht. Wenn man nur den Wert 1 betrachtet, so entspricht dies der Annahme hydrostatischer Druckverteilung, d.h. der Druck fließenden Wassers ist gleich demjenigen ruhenden Wassers. Falls zudem der 2. Term verwendet wird, so hat man es mit der **stationären Boussinesq-Gleichung** zu tun

$$H = h(x) + \frac{q^2}{2gh(x)^2} \left(1 + \frac{1}{3} \left(2h(x)h''(x) - h'(x)^2 \right) \right) \tag{1}$$

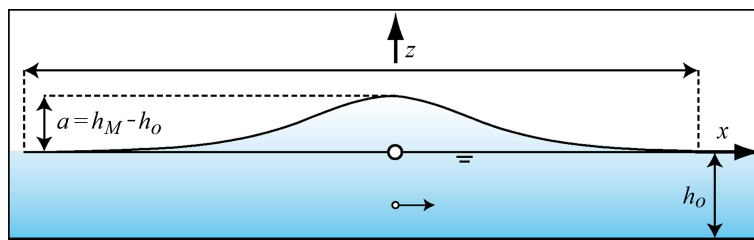


Abbildung 2: Solitärwelle – Definitionsskizze

Abbildung 2 illustriert den physikalischen Sachverhalt. Bekanntlich besteht die Solitärwelle lediglich aus einem Wellenberg der Höhe h_M . Asymptotisch gilt in grosser Entfernung vom Wellenmaximum $h(\pm\infty) = h_o$, dort also verschwinden alle Ableitungen des Profils, d.h.

$$h^{(n)}(\pm\infty) = 0. \quad (2)$$

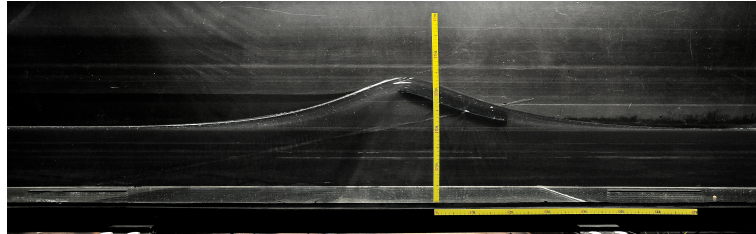


Abbildung 3: Solitärwelle – Foto

4 Lösen der Differentialgleichung

Um die Bearbeitung solcher Probleme zu illustrieren wird die DGL nun Schritt für Schritt gelöst - die technischen Details überlassen wir dem Leser.

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Annahmen über das asymptotische Verhalten der Welle, dass

$$H = h_o + \frac{q^2}{2gh_o^2}$$

2. Betrachten Sie nun die folgenden Relativwerte $X := \frac{x}{h_o}$, $y = \frac{h}{h_o}$ und die sogenannte Zufluss-Froudezahl $f^2 := \left(\frac{q^2}{gh_o^3}\right)$. Die Froude-Zahl (Formelzeichen: Fr oder hier f) ist eine dimensionslose Kennzahl der Physik. Sie ist nach William Froude (1810 – 1879) benannt und stellt ein Mass für das Verhältnis von Trägheitskräften zu Schwerkraften innerhalb eines hydrodynamischen Systems dar.

Zeigen Sie, dass sich die Gl. (1) reduziert zu der dimensionslosen Gleichung für $y(x)$

$$1 + \frac{f^2}{2} = y(X) + \frac{f^2}{2y(X)^2} \left(1 + \frac{1}{3} \left(2y(X)y''(X) - y'(X)^2 \right) \right) \quad (3)$$

wobei hier $y'(X) = \frac{dy}{dX}(X)$ usw. Beachten Sie, dass Gl. (3) eine autonome gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung ist – versuchen Sie, diese DGL mit Ihrem Computer zu lösen.

3. (a) Was ist das asymptotische Verhalten von $y(X)$ und $y^{(n)}(X)$ falls $X \rightarrow \pm\infty$?
(b) Überprüfen Sie, dass $y(X) \equiv 1$ eine Lösung von Gl. (3) ist.
4. Als nächstes wird die Ordnung der Differentialgleichung reduziert. Dazu führen wir die folgende Hilfsfunktion p ein

$$p(X) := \left(\frac{dy}{dX}(X) \right)^2$$

Zeigen Sie, dass $\frac{dp}{dX} = 2 \frac{dy}{dX} \cdot \frac{d^2y}{dX^2}$ woraus

$$p'(y) = 2 \frac{d^2y}{dX^2} \quad (4)$$

wobei p' hier die Ableitung nach y bedeutet. Also $\frac{dp}{dX} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dX}$.

5. Zeigen Sie, dass wir mit Hilfe der Gl. (4) die Gl. (3) reduzieren können zur Gleichung 1. Ordnung

$$y \cdot p'(y) - p(y) = 3(y-1) \left(y + 1 - \frac{2y^2}{f^2} \right) \quad (5)$$

Dies ist eine inhomogene lineare DGL 1. Ordnung

6. (a) Zeigen Sie, dass $p(y) = Cy$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Variation der Konstanten, dass die allgemeine Lösung von Gl. (5) gegeben ist durch

$$p(y) = -\frac{3y^3}{f^2} + \frac{6y^2}{f^2} + 3y^2 + 3 + Cy \quad (6)$$

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Randbedingungen $y(\pm\infty) = 1$ und $y^{(n)}(\pm\infty) = 0$, dass $C = -6 - \frac{3}{f^2}$ und somit

$$p(y) = 3(y-1)^2 \left(1 - \frac{y}{f^2} \right) \quad (7)$$

7. Mit $p(X) := \left(\frac{dy}{dX}(X) \right)^2$ und für $X > 0$ soll die Ableitung von $y(X)$ negativ sein, also folgt

$$\frac{dy}{dX}(X) = -\sqrt{3}(y-1) \sqrt{1 - \frac{y}{f^2}}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese DLG separierbar ist.

(b) Verifizieren Sie mit Hilfe der Substitution

$$z = \sqrt{\frac{f^2 - y}{f^2 - 1}}$$

dass die Lösung gegeben ist durch

$$\frac{-2f}{\sqrt{f^2 - 1}} \operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{f^2 - y}{f^2 - 1}} \right) = -\sqrt{3}X + C_2 \quad (8)$$

8. Zeigen Sie mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen dass $C_2 = 0$

9. (a) Zeigen Sie nun, dass die Lösung gegeben ist durch

$$y(X) = f^2 - (f^2 - 1) \tanh^2 \left(\frac{\sqrt{3(f^2 - 1)}}{2f} X \right) \quad (9)$$

oder auch

$$y(X) = 1 + \frac{f^2 - 1}{\cosh^2 \left(\frac{\sqrt{3(f^2 - 1)}}{2f} X \right)} \quad (10)$$

(b) Skizzieren Sie den Graph von $y(X)$

10. Zeigen Sie, ohne abzuleiten, aber durch Überlegung, dass das Maximum von $y = f^2$ ist und erreicht wird bei $X = 0$.

Das Wellenprofil ähnelt einer Gauss'schen Verteilungskurve, entspricht aber einer höheren Eulerfunktion (in unserem Fall \cosh^{-2}).

5 Weitere Resultate

Die Wellenpropagations-Geschwindigkeit der Solitärwelle beträgt

$$c = (gh_M)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

Sie hängt deshalb ausschliesslich von der maximalen Wellenhöhe h_M ab. In einem seichten Teich der Wassertiefe $h_o = 0.1$ m folgt bei kleiner Wellenhöhe $c \approx 1$ m/s, im Stausee der Tiefe $h_o = 100$ m dagegen $c \approx 35$ m/s, wogegen sich im Marianengraben des Pazifiks durchaus Tiefen von $h_o = 10'000$ m einstellen, also $c \approx 330$ m/s, d.h. sich Schallgeschwindigkeit ergibt. Speziell an der Solitärwelle (und den allgemeineren Cnoidalwellen oder gar Flachwasserwellen) ist die horizontale Geschwindigkeits-Verteilung, die sich praktisch über die gesamte Wassertiefe ausbreitet, im Gegensatz zu den typisch von Wind erzeugten Tiefwasserwellen. Man kann also Solitärwellen über den Druckanstieg am Boden ausmessen, was in der Frühwarn-Methode durchgeführt wird. Damit umgeht man das Problem der Wellenerkenntnis beispielsweise mit Satelliten, da sich diese Wellen infolge der grossen Länge so nicht ausmessen lassen.

Wie etwa vom Australier John H. Michell (1863-1940) 1893 beschrieben, brechen Solitärwellen bei einer relativen Maximalhöhe von $\frac{h_M}{h_o} = 1.78$. Dies entspricht dem theoretischen Maximalwert, der unterschritten wird, falls der Kanalboden nicht horizontal ist oder eine Rauigkeit aufweist. Abbildung 4 zeigt die brechende Solitärwelle.

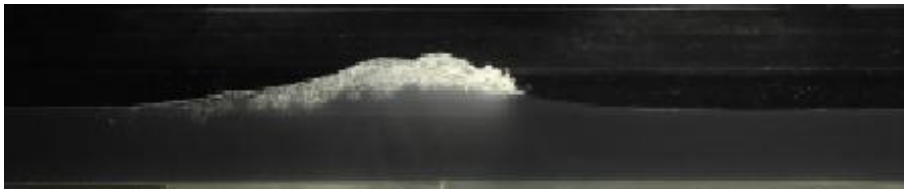


Abbildung 4: Brechende Solitärwelle mit Propagationsrichtung von links nach rechts

6 Notation

c = Wellenpropagations-Geschwindigkeit (m/s)

f^2 = Quadrat der ungestörten Froudezahl = $\frac{q^2}{gh_o^3}$

g = Erdbeschleunigung (m/s²)

h = Druckhöhe (m)

h_M = Maximal-Wellenhöhe (m)

h_o = Ruhewassertiefe (m)

H = Energiehöhe (m)

q = Durchfluss pro Einheitsbreite (m²/s)

v = Geschwindigkeit (m/s)

x = Längskoordinate (m)

7 Referenzen

- Boussinesq, J. (1872). Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 17: 55-108.
- Hager, W.H., Hutter, K. (1984). Approximate treatment of open channel flow. *Acta Mechanica* 51(1): 31-48.
- Sander, J., Hutter, K. (1991). On the development of the theory of the solitary wave: A historical essay. *Acta Mechanica* 86(1): 111-152.
- Korteweg, D.J., de Vries, G. (1891). On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine Series 5*, 39: 422-443.
- Michell, J.H. (1893). The highest waves in water. *Philosophical Magazine Series 5* 36: 430-437.
- Russell, J.S. (1837). Report of the committee of waves. *British Association for the Advancement of Science* 7: 417-496.
- Wehausen, J.V., Laitone, E.V. (1960). Surface waves. *Handbuch der Physik* 9, S. Flügge, ed. Springer: Berlin.