Gerade oder ungerade - das ist hier die Frage!

Beat Jaggi, beat.jaggi@phbern.ch

1 Einleitung

Es erstaunt, bei wie vielen mathematischen Phänomenen die Parität (Eigenschaft einer ganzen Zahl, gerade oder ungerade zu sein) eine entscheidende Rolle spielt! Die Parität ist wichtig beim Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$, beim sogenannten "Igelsatz" oder bei der Euler-Charakteristik, es gibt gerade und ungerade Funktionen, gerade und ungerade Permutationen, ...

Die Liste der aufgeführten Beispiele ist nicht abschliessend.

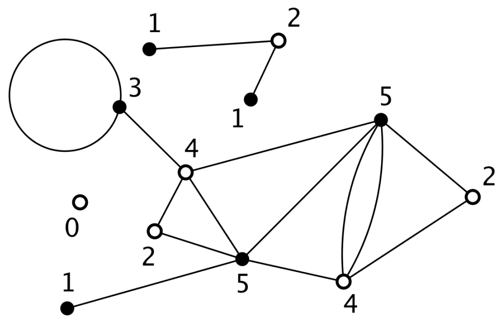
2 Ein Satz der Graphentheorie, das Lemma von Sperner und der Fixpunktsatz von Brouwer

Wir beginnen mit einem einfachen Satz aus der Graphentheorie. Mit diesem Satz lässt sich das sogenannte Lemma von Sperner beweisen. Aus dem Lemma von Sperner wiederum kann der bekannte Fixpunktsatz von Brouwer gefolgert werden!

Ein **Graph** besteht aus einer Menge von Ecken (Punkten) zusammen mit einer Menge von Kanten (Linien), welche je zwei Ecken (nicht unbedingt verschiedene) verbinden.

Der **Grad** einer Ecke E ist die Anzahl Kanten, die bei E ankommen.

Satz: In einem Graphen ist die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad stets gerade.



In diesem Graphen gibt es 6 Ecken (schwarz) mit ungeradem Grad.

Beweis: Mit Induktion über die Anzahl der Kanten:

In einem Graphen ohne Kanten ist der Grad jeder Ecke gleich 0, also ist die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad ebenfalls gleich 0 und somit gerade.

Sei $\mathcal{G}$ ein Graph, in dem die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad gerade ist. Wir fügen zu $\mathcal{G}$ eine weitere Kante k hinzu, welche die Ecken E_i und E_j verbindet.

Fall 1: Hatten E_i und E_j vor dem Zufügen von k unterschiedliche Parität, dann verändert sich durch das Zufügen von k die Anzahl der Ecken mit ungeraden Grad und auch die Anzahl der Ecken mit geraden Grad nicht; die Paritäten werden einfach vertauscht.

Fall 2: Ist $E_i = E_j$, dann erhöht sich durch das Hinzufügen der Kante k der Grad von $E_i = E_j$ um 2, die Parität (gerade oder ungerade) bleibt.

Wir können im Folgenden $E_i \neq E_j$ annehmen.

Fall 3a: Hatten E_i und E_j vor dem Zufügen von k beide geraden Grad, dann vermindert sich durch das Zufügen von k die Anzahl der Ecken mit geraden Grad um 2, während sich die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad um 2 erhöht.

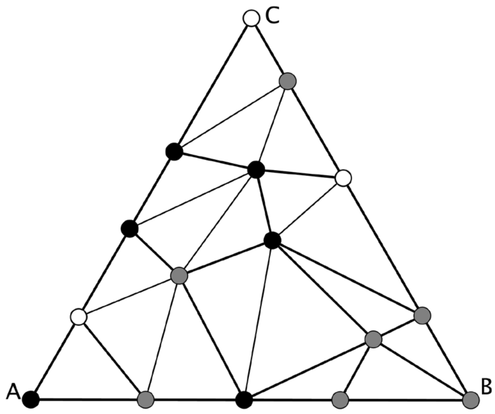
Fall 3b: Hatten E_i und E_j vor dem Zufügen von k beide ungeraden Grad, dann erhöht sich durch das Zufügen von k die Anzahl der Ecken mit geraden Grad um 2, während sich die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad um 2 vermindert.

In jedem Fall hat auch der neue Graph $\mathcal{G} \cup \{k\}$ eine gerade Anzahl von Ecken mit ungeradem Grad. $\square$

Das Lemma von Sperner

Ein Dreieck ABC sei trianguliert, also in eine endliche Anzahl von "kleinen" Teildreiecken zerlegt, die Kante an Kante zusammenstossen. Die Eckpunkte der Triangulierung (i.e. der Teildreiecke) seien mit den Farben schwarz, grau und weiss gefärbt und zwar so, dass

bei den Eckpunkten A, B und C alle drei Farben vorkommen
(das Dreieck ABC ist "3-gefärbt");
Punkte auf der Kante schwarz-grau nur mit den Farben schwarz und grau,
Punkte auf der Kante grau-weiss nur mit den Farben grau und weiss,
Punkte auf der Kante weiss-schwarz nur mit den Farben weiss und schwarz gefärbt sind.
Punkte im Innern des Dreiecks ABC können beliebig gefärbt sein.

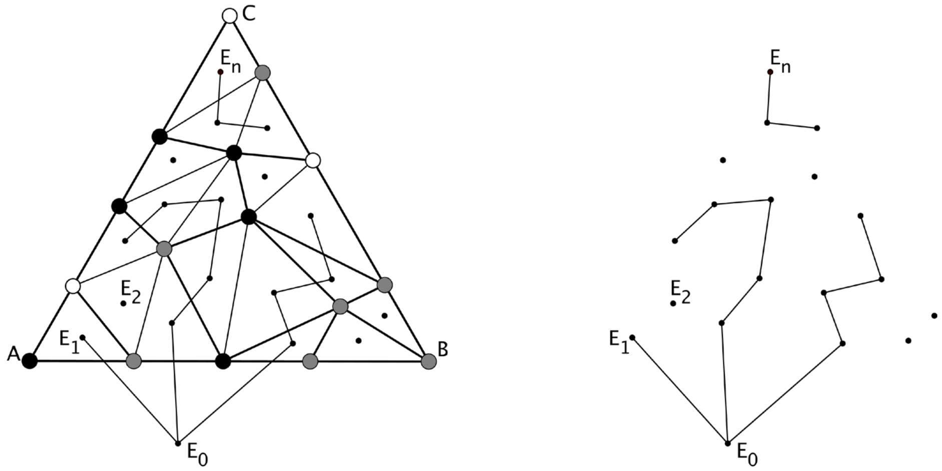


Dann gibt es in der Triangulierung stets eine ungerade Anzahl "3-gefärbter" Teildreiecke, also mindestens eines!

Beweis: Ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C sei trianguliert und die Eckpunkte der Triangulierung nach den Vorgaben des Lemmas gefärbt.

Wir erzeugen einen Graphen in der folgenden Art:

Wir wählen einen Punkt E_0 ausserhalb des grossen Dreiecks ABC und in jedem Teildreieck der Triangulierung einen Punkt $E_1, E_2, \cdots, E_n$. Wir verbinden zwei dieser Punkte genau dann mit einer Linie/Kante, wenn die beiden zugehörigen Teildreiecke der Triangulierung eine gemeinsame Seite mit einem schwarzen und einem grauen Eckpunkt haben (siehe Bild links).



Man beachte, dass so die Seiten schwarz-weiss und weiss-grau des Dreiecks ABC von keinen Kanten gekreuzt werden.

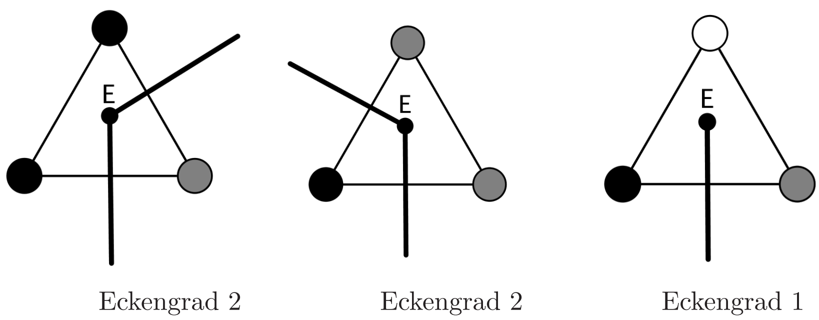
Nun betrachten wir die Grade (Anzahl Kanten, die bei einer Ecke ankommen) der Punkte $E_0, E_1, E_2, \cdots, E_n$ des so entstandenen Graphen (Bild rechts):

Entlang der Kante AB muss es eine ungerade Anzahl Wechsel zwischen den Farben schwarz und grau geben. Somit kreuzt eine ungerade Zahl von Kanten diese grosse Kante. Der Grad von E_0 wird also ungerade sein.

Für die Punkte $E_1, E_2, \cdots, E_n$ im Innern des Dreiecks ABC gibt es zuerst einmal zwei Fälle zu unterscheiden:

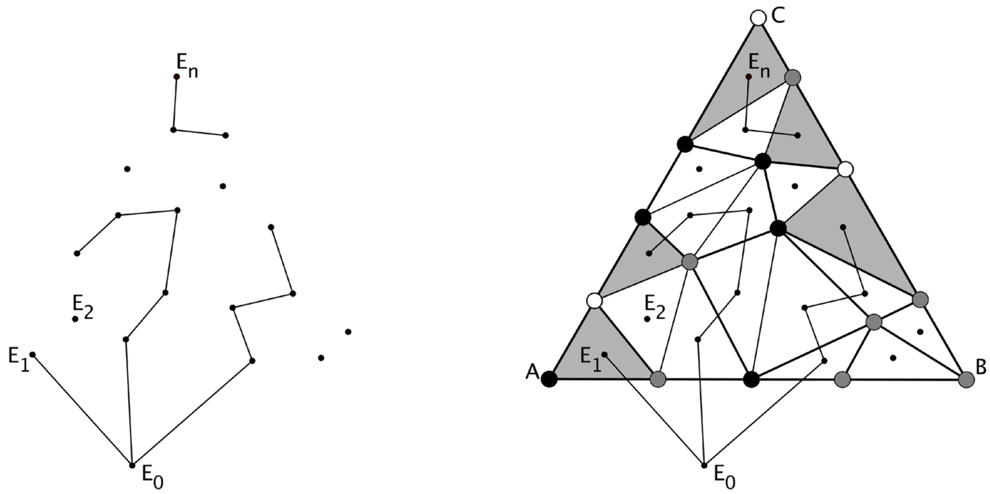
(a) Der Punkt gehört zu einem Teildreieck der Triangulierung, welches keine Seite mit einem schwarzen und einem grauen Eckpunkt hat. Dann ist der Grad des entsprechenden Punktes gleich 0 (zum Beispiel E_2).

(b) Der Punkt gehört zu einem Teildreieck mit (mindestens) einer schwarz-grauen Seite. Dann gibt es für die Farbe der dritten Ecke des Dreiecks drei Möglichkeiten: schwarz, grau oder weiss.



Nur beim Dreieck rechts mit den Ecken schwarz, grau und weiss ist der Grad des Punktes E ungerade (nämlich 1).

Weil nun der Grad von E_0 ungerade ist und weil die Anzahl der Punkte mit ungeradem Grad gerade ist (siehe oben), muss es im Innern des Dreiecks mindestens einen Punkt mit ungeradem Grad, also mit Grad 1, geben. Es muss also mindestens ein Teildreieck mit einer schwarzen, einer grauen und einer weissen Ecke existieren.



Genau die Punkte mit Grad 1 gehören zu Teildreiecken, deren Ecken mit den drei Farben gefärbt sind! In unserem Beispiel sind es 5 Punkte mit Grad 1, also gibt es genau 5 dreifarbige Teildreiecke (grau schattiert). □

Bemerkung: Das Lemma von Sperner lässt sich auf n-dimensionale Simplizes verallgemeinern.

Fixpunktsatz von Brouwer (1911): Jede steige Abbildung $f : B^n \longrightarrow B^n$ einer n-dimensionalen Kugel auf sich selber hat mindestens einen Fixpunkt (also einen Punkt $x \in B^n$ mit $f(x) = x$).

Für Dimension $n = 1$, also für ein Intervall, folgt dieser Satz leicht aus dem Zwischenwertsatz:

Sei $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ eine stetige Abbildung des Intervalls $[a, b]$ auf sich selbst
($a < b$ vorausgesetzt).

Da f stetig ist, ist auch $\phi(x) := f(x) - x$ stetig.

Nun ist $\phi(a) = f(a) - a \geq 0$ und $\phi(b) = f(b) - b \leq 0$.

Die Spezialfälle $\phi(a) = 0$ bzw. $\phi(b) = 0$ ergeben sich nur, wenn $f(a) = a$ bzw. $f(b) = b$ gilt. Das heisst also, dass entweder a oder b Fixpunkte von f sind oder $\phi(a) > 0$ bzw. $\phi(b) < 0$ gelten muss.

Aus Letzterem folgt nach dem Zwischenwertsatz mittels der Stetigkeit von ϕ, dass es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ geben muss mit $\phi(x_0) = 0$. Daraus folgt dann $f(x_0) = x_0$ und somit, dass x_0 ein Fixpunkt von f ist. $\square$

Für höhere Dimensionen ist Brouwers Beweis doch einigermassen kompliziert. Es war daher eine grosse Überraschung, als 1928 der junge Emanuel Sperner (er war damals 23 Jahre alt) ein einfaches kombinatorisches Resultat (das Lemma von Sperner) vorlegte, aus dem Brouwers Fixpunktsatz gefolgert werden kann!

Für die Dimension 2 führt Sperner den Beweis nicht für eine Kreisscheibe, sondern für ein Dreieck. In diesem Dreieck betrachtet er eine Folge immer feinerer Triangulationen zusammen mit einer Folge 3-gefärbter Dreiecke, welche schliesslich gegen einen Fixpunkt der Abbildung f konvergieren.

Für einen vollständigen Beweis siehe zum Beispiel M. Aigner, G. Ziegler, Das Buch der Beweise, Springer Verlag, 2002

3 Noch mehr Graphentheorie: Eulerzüge/Eulerkreise

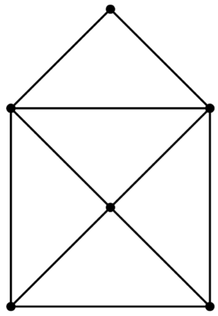
Ein **Eulerzug** in einem Graphen ist ein Weg, der alle Kanten eines Graphen genau einmal enthält.

Ein **Eulerkreis** in einem Graphen ist ein geschlossener Weg, der alle Kanten eines Graphen genau einmal enthält. Anfangs- und Endpunkt des Weges sind identisch.

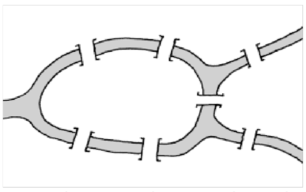
Satz: Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann einen Eulerzug, wenn die Anzahl Ecken mit ungeradem Grad gleich 0 oder gleich 2 ist.

Satz: Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn die Anzahl Ecken mit ungeradem Grad gleich 0 ist.

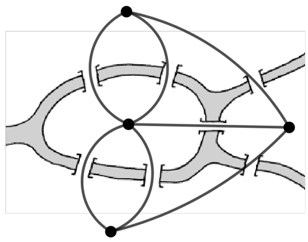
Der Graph, der zum "Haus des Nikolaus" gehört, besitzt einen Eulerzug. Nur die beiden Eckpunkte unten haben Grad 3, also ungeraden Grad.

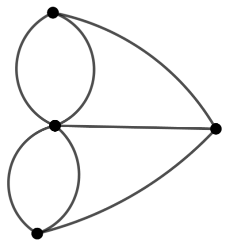


Der Graph, der zum berühmten 'Königsberger Brückenproblem' gehört, besitzt keinen Eulerzug. Alle vier Eckpunkte des zugehörigen Graphen haben ungeraden Grad.

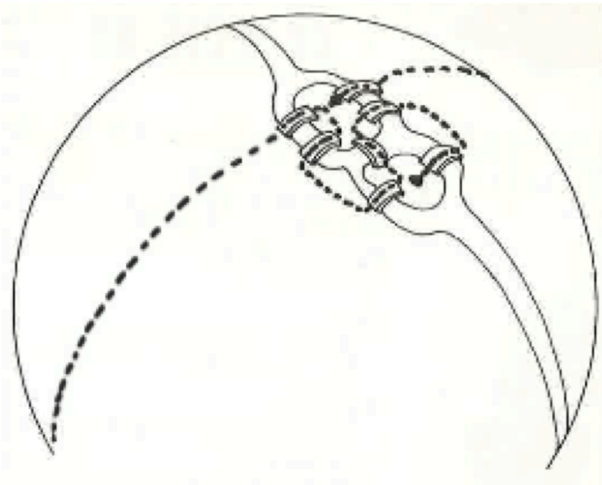


Der Fluss Pregel in Königsberg mit den sieben Brücken





Vorsicht: Eine 'globale' Lösung des Problems existiert sehr wohl! Siehe unten.



Une solution « globale » au problème des sept ponts de Koenigsberg.

4 Gerade und ungerade Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst gerade, wenn $f(x) = f(-x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

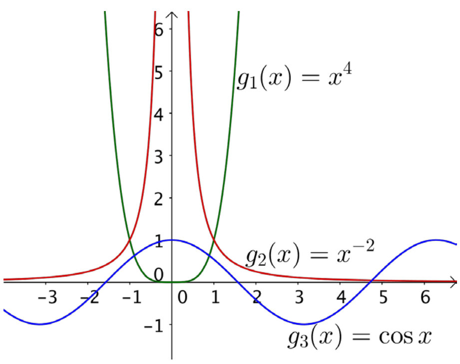
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst ungerade, wenn $f(x) = -f(-x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiele für gerade Funktionen sind
$f(x) = \dots, x^{-4},\ x^{-2},\ x^0,\ x^2,\ x^4, \dots$, weiter $f(x) = \cos x$.

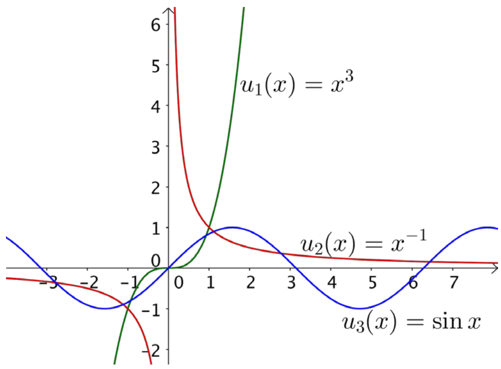
Beispiele für ungerade Funktionen sind
$f(x) = \dots, x^{-3},\ x^{-1},\ x^1,\ x^3,\ x^5, \dots$, weiter $f(x) = \sin x$.

Wie häufig überträgt sich diese spezielle Eigenschaft einer Funktion auf deren Graphen und umgekehrt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist gerade} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{Der Graph von } f \text{ ist achsensymmetrisch zur } y\text{-Achse.} \\ f \text{ ist ungerade} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{Der Graph von } f \text{ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.} \end{aligned}$$



Drei Beispiele von geraden Funktionen



Drei Beispiele von ungeraden Funktionen

Erstaunlich ist der folgende

Satz: Jede Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lässt sich als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellen.

Begründung: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben.

Wir setzen $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ und $u(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

So wird $g(x) + u(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$.

Weiter gilt

$g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$, also ist g eine gerade Funktion.

und

$u(-x) = \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -u(x)$, also ist u eine ungerade Funktion. $\square$

Beispiele:

1. $f(x) = e^x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \cosh x + \sinh x$

2. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d =$

$$\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d + a(-x)^3 + b(-x)^2 + c(-x) + d}{2}$$
$$+\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d - \big(a(-x)^3 + b(-x)^2 + c(-x) + d\big)}{2}$$

$$= \frac{2bx^2 + 2d}{2} + \frac{2ax^3 + 2cx}{2} = \big(bx^2 + dx^0\big) + \big(ax^3 + cx^1\big)$$

Eine Polynomfunktion wird einfach in Terme mit geraden und Terme mit ungeraden Potenzen von x aufgespalten.

5 Gerade und ungerade Permutationen

Mit S_n bezeichnen wir die Gruppe aller **Permutationen** der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Das **Vorzeichen** einer Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n-1) & \pi(n) \end{pmatrix}$$

ist definiert durch sgn $\pi = (-1)^{|\text{inv }(\pi)|}$, wobei

$$\text{inv }(\pi) = \{(\pi(i), \pi(j)) \in \{1, 2, \ldots n\} \times \{1, 2, \ldots n\} : i < j \text{ und } \pi(i) > \pi(j)\}$$

die Menge der Fehlstände der Permutation ist.

Ist das Vorzeichen von π gleich $+1$, nennt man die Permutation gerade, ist sgn $\pi = -1$, dann heisst π ungerade.

Beispiel 1: Die Fehlstände der Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

sind $(2, 1)$, $(4, 3)$ und $(5, 3)$, somit ist sgn $(\pi) = (-1)^3 = -1$ und damit ist π ungerade.

Beispiel 2: Die identische Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

ist immer gerade, denn sie weist keine Fehlstände auf.

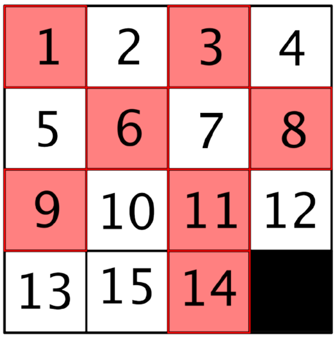
Beispiel 3: Permutationen von S_3

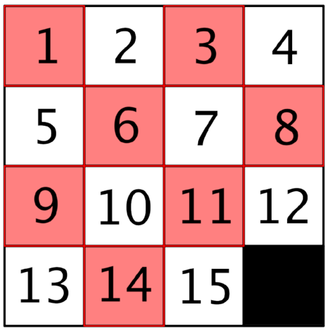
Permutation	Fehlstände	Vorzeichen
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	–	$+1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$(3,2)$	-1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$(2,1)$	-1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$(2,1), (3,1)$	$+1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$(3,1), (3,2)$	$+1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(3,2), (3,1), (2,1)$	-1

Anwendung: Im Jahre 1880 erfand der amerikanische Postbeamte Noyes Palmer Chapman folgendes Rätsel:

In einer quadratischen Schachtel liegen Spielsteine mit den Zahlen $1-15$. Ein Feld (schwarz) ist frei. Ein (vertikal oder horizontal) benachbarter Spielstein kann jeweils in das freie Feld hineingeschoben werden.

Nun werden die Steine 14 und 15 vertauscht (Bild links). Ziel ist es, die ursprüngliche Anordnung der Spielsteine (Bild rechts) wiederherzustellen.





die Steine 14 und 15 sind vertauscht   ursprüngliche Anordnung

Der erste Preis von 1000 Dollar, der für die richtige Lösung ausgeschrieben war, wurde nie vergeben, obgleich Tausende von Leuten behaupteten, die gestellte Aufgabe gelöst zu haben. Das erstaunt nicht, denn das Rätsel ist unlösbar!

Zum Beweis übersetzt man eine Anordnung der Spielsteine in eine Permutation π (das leere Feld wird einfach ignoriert) und betrachtet dann die Summe

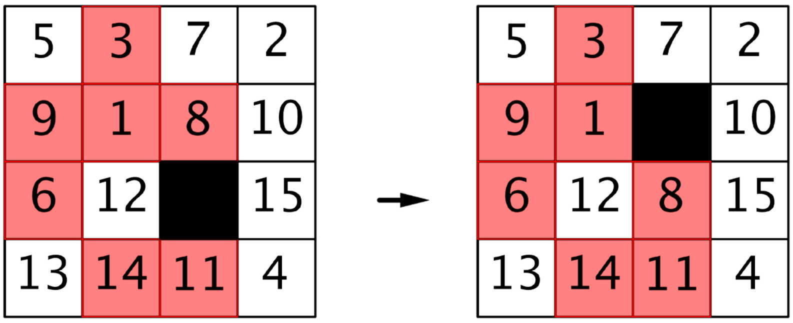
$$N = |\text{inv}\ (\pi)| + n$$

wobei $|\text{inv}\ (\pi)| =$ die Anzahl der Fehlstände der Permutation und

$n =$ die Zeile des leeren Feldes ist.

Mittels Fallunterscheidung ist leicht einzusehen, dass die Parität von N bei jedem erlaubten Zug invariant bleibt. Wird ein Spielstein horizontal verschoben, ändert weder die Permutation noch die Zeile, in der sich das leere Feld befindet. Wird ein Spielstein vertikal verschoben, dann ändert die Zeile des leeren Feldes um ± 1, bei der Permutation gibt es immer genau drei Zahlenpaare, bei denen der Zustand von 'kein Fehlstand' zu 'Fehlstand' oder von 'Fehlstand' zu 'kein Fehlstand' ändert.

Beispiel:



Ein möglicher Zug: Spielstein 8 wird senkrecht nach unten geschoben.

Der Stellung links entspricht die Permutation

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 5 & 3 & 7 & 2 & 9 & 1 & 8 & 10 & 6 & 12 & 15 & 13 & 14 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

π_1 hat 31 Fehlstände. Das schwarze Feld ist in der Zeile 3, also ist $N_1 = 31 + 3 = 34$.

Der Stellung rechts entspricht die Permutation

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 5 & 3 & 7 & 2 & 9 & 1 & 10 & 6 & 12 & 8 & 15 & 13 & 14 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

π_2 hat 32 Fehlstände. Das schwarze Feld ist in der Zeile 2, also ist $N_2 = 32 + 2 = 34$.

Vergleicht man π_1 mit π_2, dann wird aus $(8, 10)$ der Fehlstand $(10, 8)$, aus dem Fehlstand $(8, 6)$ wird $(6, 8)$ und aus $(8, 12)$ wird der Fehlstand $(12, 8)$. Bei allen anderen Zahlenpaaren ändert sich nichts.

Die Paritäten von N_1 und N_2 sind folglich gleich. (In unserem Beispiel sind ausnahmsweise sogar die Summen selber gleich.)

6 Die 'Russische' Bauernmultiplikation

Die Russische Bauernmultiplikation (auch Ägyptisches Multiplizieren, Abessinische Bauernregel oder Verdopplungs-Halbierungs-Methode genannt) ist ein einfaches Verfahren zur Multiplikation zweier natürlicher Zahlen. Schon im Altertum bekannt, war das Verfahren in Deutschland bis ins Mittelalter und in Russland bis weit in die Neuzeit üblich, woher auch der Name rührt.

Beispiel: Wir möchten das Produkt $178 \cdot 113$ berechnen.

Den ersten Faktor 178 teilen wir fortgesetzt durch 2. Geht es nicht auf, dann runden wir ab. (Siehe Spalte links im Bild 1)

Den zweiten Faktor 113 verdoppeln wir fortgesetzt. (Siehe Spalte rechts im Bild 1).

178	x	113
89	x	226
44	x	452
22	x	904
11	x	1808
5	x	3616
2	x	7232
1	x	14464

Bild 1

[redacted]		
89	x	226
[redacted]		
11	x	1808
5	x	3616
[redacted]		
1	x	14464
Produkt =		20114

Bild 2

Nun streichen wir Zeilen, bei denen die linke Zahl gerade ist (siehe Bild 2).

Das Produkt von 178 und 113 ergibt sich dann als Summe der verbleibenden Zahlen in der Spalte rechts in Bild 2:

$$178 \cdot 113 = 226 + 1808 + 3616 + 14'464 = 20'114$$

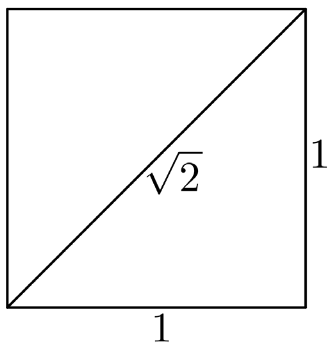
Die russische Bauernmultiplikation kann durch Zerlegung des einen Faktors in Zweierpotenzen nachvollzogen werden:

$$\begin{aligned}
178 \cdot 113 &= \left(0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7\right) \cdot 113 \\
&= 2^1 \cdot 113 + 2^4 \cdot 113 + 2^5 \cdot 113 + 2^7 \cdot 113 \\
&= 226 + 1808 + 3616 + 14'464 = 20'114
\end{aligned}$$

Die Summanden, die den Faktor Null enthalten, entsprechen den Zeilen, die gestrichen werden.

7 Irrationalität von $\sqrt{2}$

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational.



Beweis: Gegenannahme: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ für natürliche Zahlen p und q.

Wir können annehmen, dass der Bruch $\frac{p}{q}$ schon gekürzt ist.

Es wird $2 = \frac{p^2}{q^2} \implies p^2 = 2q^2$. Also ist p^2 eine gerade Zahl und damit ist auch p eine gerade Zahl. (Wäre $p = 2k - 1$ ungerade, dann auch $p^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2\left(2k^2 - 2k\right) + 1$.)

Mit $p = 2k$ wird $p^2 = 4k^2$ und damit $p^2 = 4k^2 = 2q^2$ oder $q^2 = 2k^2$. Also ist q^2 gerade und damit auch q gerade.

Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass der Bruch $\frac{p}{q}$ schon gekürzt ist. $\square$

8 Der Satz von Euler-Poincaré für d-dimensionale Polytope

Unter einem d-Polytop verstehen wir ein verallgemeinertes Polygon der Dimension d.

Ein 0-Polytop ist eine einzelne Ecke (ein Punkt);

ein 1-Polytop besteht aus zwei Ecken, die durch eine Kante verbunden sind;

ein 2-Polytop besteht aus mehreren, jeweils an einer Ecke verbundenen, einen Zyklus bildenden 1-Polytopen und stellt somit ein Polygon dar;

ein 3-Polytop besteht wiederum aus mehreren an den Kanten verbundenen 2-Polytopen und stellt somit ein Polyeder dar.

Allgemein wird ein d-Polytop gebildet aus mehreren $(d-1)$-Polytopen, die untereinander jeweils ein $(d-2)$-Polytop gemeinsam haben können (wie die gemeinsame Ecke zweier Kanten oder die gemeinsame Kante zweier Flächen).

Des Weiteren müssen alle $(d-2)$-Unterpolytope in genau zwei $(d-1)$-Polytopen enthalten sein, und zwischen zwei $(d-1)$-Unterpolytopen muss eine Reihe von $(d-1)$-Unterpolytopen existieren, so dass jeweils zwei benachbarte Glieder auf die zuvor beschriebene Weise verbunden sind – so bilden etwa nach dieser Definition mehrere disjunkte Polygone zusammen kein 2-Polytop.

Satz (Euler-Poincaré): Für ein d-Polytop P bezeichnen wir mit $f_i(P)$ die Anzahl der i-dimensionalen Seitenflächen. Dann gilt für die Euler-Charakteristik von P:

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i f_i(P) = 1 - (-1)^d$$

resp.

$$\chi(P) = f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) - f_3(P) + \cdots \pm \cdots - f_{d-1}(P) = 0 \text{ für } d \text{ gerade}$$

$$\chi(P) = f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) - f_3(P) + \cdots \mp \cdots + f_{d-1}(P) = 2 \text{ für } d \text{ ungerade}$$

Beispiele:

1. $d = 0$: Es gibt gar keine $(d-1)$-dimensionalen Seitenflächen. Also ist

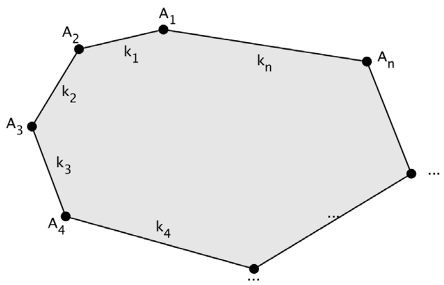
$$\chi(P) = \sum_{i=0}^{-1} (-1)^i f_i(P) = 1 - (-1)^0 = 0$$

2. Ein 1-Polytop ist eine Strecke mit zwei Endpunkten. Also ist

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^{0} (-1)^i f_i(P) = f_0(P) = 1 - (-1)^1 = 2$$

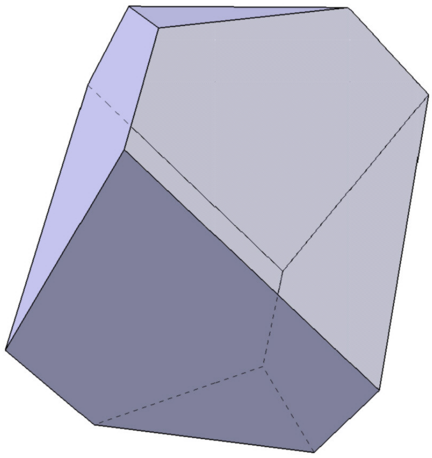
3. Ein 2-Polytop ist Vieleck mit n Ecken und n Kanten. Also ist

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i f_i(P) = f_0(P) - f_1(P) = n - n = 1 - (-1)^2 = 0$$



4. Ein 3-Polytop ist ein Polyeder mit e Ecken, k Kanten und f Seitenflächen. Nach der berühmten Eulerschen Polyederformel gilt:

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i f_i(P) = f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) = e - k + f = 1 - (-1)^3 = 2$$



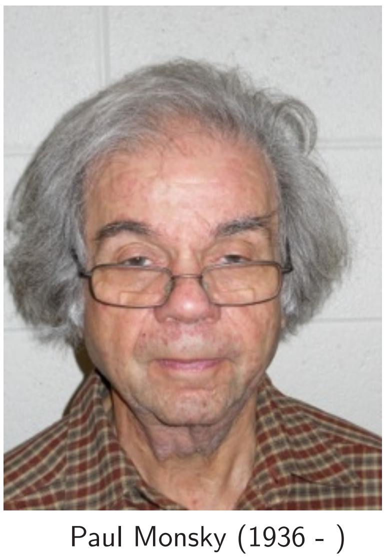
Das Dürer-Polyeder

9 Der Satz von Monsky

Frage: Kann man das Einheitsquadrat in n Dreiecke der Fläche $\frac{1}{n}$ zerlegen?

Antwort: Das hängt von der Parität von n ab!

Satz (Paul Monsky, 1970): Es ist nicht möglich, ein Quadrat in eine ungerade Anzahl von Dreiecken gleicher Fläche zu zerlegen.

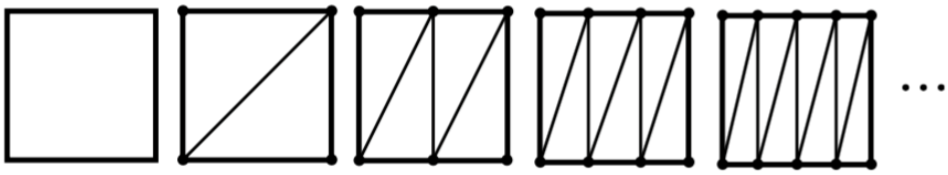


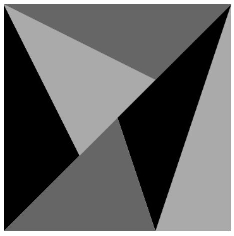
Paul Monsky (1936 -)

Bemerkungen:

1. In Frankreich ist dieser Satz unter "Même aire $\Longrightarrow$ n pair!" bekannt.

2. Es ist natürlich möglich, ein Quadrat in eine gerade Anzahl flächengleicher Dreiecke zu zerlegen.





Dieses Quadrat ist in sechs flächengleiche Dreiecke zerlegt.

3. Für den Beweis des Satzes hat Monsky neben Bewertungstheorie auch das Lemma von Sperner verwendet! Siehe zum Beispiel

   `https://en.wikipedia.org/wiki/Monsky\%27s_theorem`

10 Der "Igelsatz"

Satz von Poincaré-Brouwer: Auf einer Sphäre $\mathbb{S}^n$ gibt es genau dann ein tangentiales, stetiges, nirgends verschwindendes Vektorfeld, wenn n ungerade ist.

Bemerkungen:

1. Für $\mathbb{S}^2$ (Kugeloberfläche) gibt es sehr anschauliche Formulierungen des Satzes:

   "Jeder stetig gekämmte Igel hat mindestens einen Glatzpunkt!"

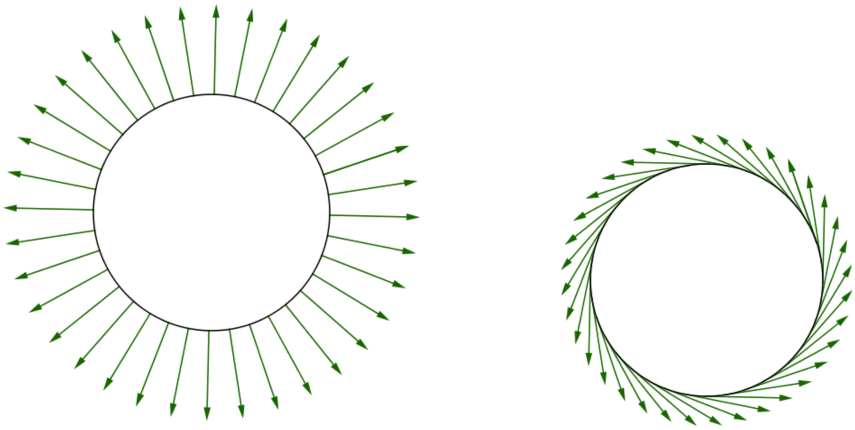
   oder

   "Ein Igel lässt sich nicht kämmen!"

   Es ist nicht möglich, die senkrecht nach oben stehenden Stachel des Igels überall glatt (tangential an den Igel) zu "kämmen".

   Interpretiert man den Satz im physikalischen Sinne, so kann prinzipiell nicht überall auf der Erde zugleich Wind wehen – es muss auf der Oberfläche eines dreidimensionalen kugelförmigen Planeten immer windstille Stellen geben.

2. $\mathbb{S}^1$ (Kreislinie) besitzt ein tangentiales, stetiges, nirgends verschwindendes Vektorfeld! Im Bild links stehen die ”Haare” noch senkrecht nach oben. Im Bild rechts ist die Kreislinie ”gekämmt”.



3. John Milnor hat 1978 einen elementaren analytischen Beweis des ”Igelsatzes” gegeben und dabei zugleich gezeigt, dass der Brouwersche Fixpunktsatz (siehe Kapitel 2) direkt auf ihn zurückgeführt werden kann.

Siehe auch
Ian Stewart, *Die gekämmte Kugel: 17 mathematische Kurzgeschichten aus Spektrum der Wissenschaft*, Gebundene Ausgabe 1997, ISBN-13: 978-3827400901

11 Zu guter Letzt: ”Sie liebt mich - sie liebt mich nicht”!?

In einer Kurzgeschichte von Ian Stewart
(siehe https://www.spektrum.de/magazin/sie-liebt-mich-sie-liebt-mich-nicht/823037)
wird behauptet, dass eine bestimmte Art Gänseblümchen immer 34 Blütenblätter hat.

Stimmt diese Behauptung, dann lässt sich durch Betrachten der Parität der Anzahl Blütenblätter dem ’Zufall’ bei diesem Entscheidungsverfahren doch sehr gezielt nachhelfen!