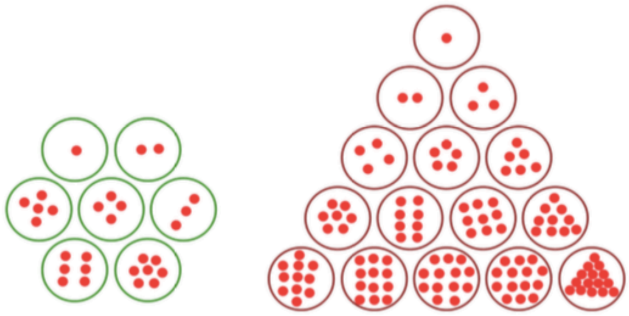
Weihnachtsaufgabe 2018 von Erich Ch. Wittmann

Peter Gallin, peter@gallin.ch



In den grünen Körben links liegen 1 bis 7 Äpfel, in den braunen Körben rechts 1 bis 15 Äpfel.
Die Inhalte der Körbe jedes Sets können nach folgender Regel verändert werden:
Aus einem Korb dürfen so viele Äpfel in einen anderen Korb gelegt werden, wie **dort** schon liegen.

Es werden k Körbe mit 1 bis k Äpfeln vorgegeben. Durch mehrfaches Umlegen von Äpfeln gemäss obiger Regel sollen schliesslich in allen Körben **die gleiche Anzahl Äpfel** liegen. Da insgesamt

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

Äpfel vorhanden sind, die auf k Körbe gleichmässig verteilt werden müssen, folgt, dass in jedem Korb $\frac{1}{2}(k+1)$ Äpfel liegen müssen. Damit muss k ungerade sein. Da aber durch das Umlegen der Äpfel in einem Korb immer eine gerade Anzahl Äpfel liegen, muss auch die Zahl $\frac{1}{2}(k+1)$ selbst gerade sein. Damit wird k auf die Zahlen 3 mod 4 eingeschränkt.

Die Vermutung liegt — nach einigem Experimentieren — nahe, dass für k, das um 1 kleiner als eine Zweierpotenz ist, ein einfacher Umlege-Algorithmus das Problem löst. Wir nehmen also an, dass die Zielzahl z der Anzahl Äpfel in jedem Korb

$$z = \frac{1}{2}(k+1) = 2^n$$

beträgt. Für die beiden in der Aufgabenstellung gezeigten Beispiele ist $n = 2$ ($k = 7$) resp. $n = 3$ ($k = 15$). Wir wählen hier den Fall $n = 4$ ($k = 31$) und ordnen die 31 Körbe in zwei Reihen nebeneinander an, wobei der Korb mit bereits $z = 16$ Äpfeln in der Mitte separat platziert wird.

1		31
2		30
3		29
4		28
5		27
6		26
7		25
8		24
9		23
10		22
11		21
12		20
13		19
14		18
15		17
	16	

Nun wird nach folgender Regel umgelegt: In einen linken Korb legt man vom rechts daneben liegenden Korb so viele Äpfel, wie der linke bereits enthält. Das sind 32 minus die Zahl der Äpfel im rechten Korb. Damit verdoppelt sich die Zahl links und die Zahl im rechten Korb entspricht neu der Zahl, welche horizontal neben der verdoppelten Zahl in der Liste steht. Die obige Liste wird also uminterpretiert von der konkreten Bedeutung der Körbe zu abstrakten Zahlbeziehungen zwischen zwei Zahlen, die jeweils horizontal nebeneinander stehen. Nehmen wir als Beispiel die Körbe mit links 13 Äpfeln und rechts 19. Von dort aus ergibt sich durch fortlaufendes Umlegen die folgende Folge von Paaren:

$$(13, 19) \to (26, 6) \to (20, 12) \to (8, 24) \to (16, 16)$$

Durch diese Art von Umlegen haben wir also das Paar (z, z) erreicht: In beiden Körben liegen z Äpfel. Versucht man dieses Verfahren mit geraden Zielzahlen, welche keine Zweierpotenz sind, so stellt man fest, dass Zyklen in der Paarfolge entstehen, welche nicht auf die Zielzahl führen. Ob in diesen Fällen ein Umlegen nach einer anderen Regel zum Ziel führt, lassen wir vorerst noch offen. Denkbar sind ja Umlegungen, bei denen nicht horizontal nebeneinander stehende Körbe ihre Äpfel übergeben. Im letzten Abschnitt zeigen wir, dass die von Zweierpotenzen verschiedenen Zielzahlen keine Lösung zulassen.

Nun beweisen wir, dass für Zielzahlen z als Zweierpotenzen solche Zyklen, die nicht im Paar (z, z) enden, unmöglich sind. Dazu verabreden wir, dass wir die Paare grundsätzlich so schreiben, dass links die kleinere Zahl steht. Die obige Folge sieht dann so aus:

$$(13, 19) \to (6, 26) \to (12, 20) \to (8, 24) \to (16, 16)$$

Eine weitere Vereinfachung besteht darin, dass wir nur noch die linke Zahl notieren und damit beispielsweise folgende Folge erhalten:

$$5 \to 10 \to 12 \to 8 \to 16$$

Nun geht es darum zu zeigen, dass kein Zyklus entstehen kann, dass also niemals die Ausgangzahl der Folge je wieder erreicht wird. Sei also a_1 die Ausgangszahl ($a_1 < z = 2^n$, also links in der Tabelle). Diese wird mit einer gewissen Anzahl i_1 Faktoren 2 multipliziert bis das Resultat in die rechte Seite der Tabelle springt. Horizontal links neben diesem Resultat findet man dann a_2. Dabei gilt folgende Beziehung:

$$a_2 = 2^{n+1} - 2^{i_1} a_1 \quad \text{mit} \quad i_1 \in \mathbb{N}$$

Würde man hier $a_2 = a_1$ verlangen, ergäbe sich $(2^{i_1} + 1) \cdot a_1 = 2^{n+1}$, was für $a_1 < 2^n$ nicht erfüllt werden kann. Analog folgt mit $i_2 \in \mathbb{N}$:

$$a_3 = 2^{n+1} - 2^{i_2} a_2$$

Damit ergibt sich:

$$a_3 = 2^{n+1} - 2^{i_2}(2^{n+1} - 2^{i_1} a_1) = 2^{n+1} - 2^{i_2+n+1} + 2^{i_1+i_2} a_1$$

Würde man hier verlangen, dass $a_1 = a_3$, ergäbe sich wieder ein Widerspruch, denn die Beziehung

$$(2^{i_1+i_2} - 1) \cdot a_1 = 2^{i_2+n+1} - 2^{n+1} = 2^{n+1} \cdot (2^{i_2} - 1)$$

kann wegen $a_1 < 2^n$, $i_1 > 0$ und $i_2 > 0$ nicht erfüllt werden. Gehen wir einen Schritt weiter:

$$a_4 = 2^{n+1} - 2^{i_3} a_3$$

führt auf

$$a_4 = 2^{n+1} - 2^{i_3}(2^{n+1} - 2^{i_2+n+1} + 2^{i_1+i_2} a_1) = 2^{n+1} - 2^{i_3+n+1} + 2^{i_2+i_3+n+1} - 2^{i_1+i_2+i_3} a_1$$

Setzt man $a_4 = a_1$, ergibt sich

$$(2^{i_1+i_2+i_3} + 1) \cdot a_1 = 2^{n+1} \cdot (2^{i_2+i_3} - 2^{i_3} + 1) \quad ,$$

was wiederum nicht erfüllbar ist. Allgemein erhält man nach beliebig vielen Schritten stets eine Beziehung

$$u \cdot a_1 = 2^{n+1} \cdot v$$

mit ungeraden positiven Zahlen u und v, was für eine natürliche Zahl $a_1 < 2^n$ nicht erfüllbar ist. Damit ist gezeigt, dass die Zielzahl z erreicht werden muss.

Zum Abschluss zeigen wir, dass Zielzahlen, die verschieden von einer Zweierpotenz sind, keine Lösung zulassen. Betrachten wir die inverse Umlegeoperation: Dann darf man die Zahl a der Äpfel in einem Korb halbieren, sofern dort die Zahl gerade ist, und diese Hälfte in einen beliebigen anderen Korb mit b Äpfeln legen, wo dann $b + \frac{a}{2}$ Äpfel liegen. Nehmen wir nun an, wir hätten eine Lösung mit z. B. der Zielzahl 12 gefunden, d. h. wir hätten 23 Körbe mit je 12 Äpfeln. Wenden wir nun die inverse Umlegeoperation beliebig oft an, so wird der Faktor 3, welcher 12 „verseucht", nach jeder inversen Operation erhalten bleiben, denn durch das Halbieren wird niemals der Faktor 3 eliminiert und durch die Addition einer Zahl mit Faktor 3 und einer halben Zahl, die auch den Faktor 3 enthält, entsteht wieder eine durch 3 teilbare Zahl. Kurz: Man wird die Verseuchung nicht los. Somit kann man nicht auf die gegebene Ausgangsverteilung mit $1, 2, \ldots, 23$ Äpfeln kommen, bei der ja auch Zahlen vorkommen, die keinen Faktor 3 enthalten. Das gilt für alle Zielzahlen, welche einen Primfaktor verschieden von 2 enthalten. Damit haben wir einen Widerspruch hergeleitet.