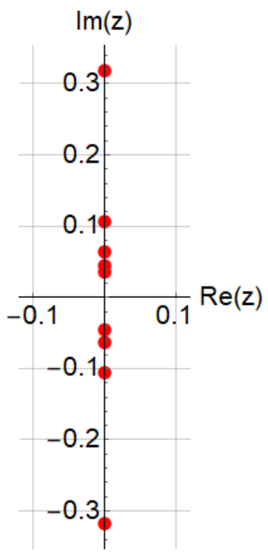
Zum "Schweren Integral"

Hans Ulrich Keller, hukkeller@bluewin.ch

Mit der Aufteilung in ein linkes und ein rechtes Integral, einer Substitution von x durch $-u$ und dem Ersetzen der Integrationsvariablen u durch x hat Peter Gallin im VSMP–Bulletin (Nr. 143 vom Mai 2020, p. 45) gezeigt, dass $I=\int_{-2}^{2}\frac{3x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}}dx=8$ ist. Dieses Integral I ist schon schwierig; eine Stammfunktion des Integranden ist mir nicht bekannt, und numerische Lösungen, wie man sie mit Computeralgebra–Systemen findet, sind nun eben keine Beweise!

Hier folgt nun ein Beweis, der den Residuensatz benützt und über ein paar nette und bemerkenswerte Schritte zum gleichen Resultat führt.

Der Integrand wird dabei als komplexwertige Funktion einer komplexen Zahl z statt einer reellwertigen Funktion einer reellen Zahl x angesehen.



Zunächst finden wir die unendlich vielen Unendlichkeitsstellen des Integranden. Es sind dies die Lösungen der Gleichung $1+e^{\frac{1}{z}}=0$, und diese sind alle rein imaginär:

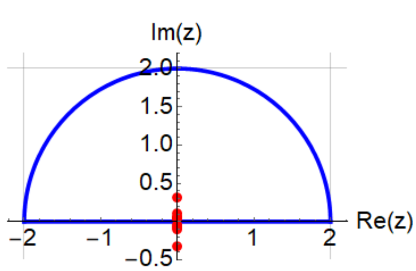
$$z_k=\frac{1}{i\pi+k\cdot 2i\pi}, k\in\mathbb{Z}:$$

$$z_k\in\left\{\ldots,-\frac{i}{7\pi},-\frac{i}{5\pi},-\frac{i}{3\pi},-\frac{i}{\pi},\frac{i}{\pi},\frac{i}{3\pi},\frac{i}{5\pi},\frac{i}{7\pi},\frac{i}{9\pi},\ldots\right\}.$$

In der Graphik links sind die oben explizit angegebenen Unendlichkeitsstellen eingezeichnet. Wird der Integrand um eine dieser Unendlichkeitsstellen in eine Laurent–Reihe entwickelt, so ist der Koeffizient des Terms $(z-z_k)^{-1}$ das Residuum des Integranden an dieser Stelle z_k. Die Residuen der oben angegebenen Unendlichkeitsstellen sind die Zahlen

$$\left\{\ldots,\frac{3}{2401\pi^4},\frac{3}{625\pi^4},\frac{3}{81\pi^4},\frac{3}{\pi^4},\frac{3}{\pi^4},\frac{3}{81\pi^4},\frac{3}{625\pi^4},\frac{3}{2401\pi^4},\frac{3}{6561\pi^4},\ldots\right\}.$$

Die Summe der Residuen derjenigen Unendlichkeitsstellen, die einen positiven Imaginärteil haben, ist gleich $\frac{3}{\pi^4}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$. Wie Euler im Jahre 1735 gezeigt hat [(1)], gilt: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$. Die Summe dieser Residuen ist darum gleich $\frac{1}{32}$. Dies gilt auch für die Summe der Residuen aller Unendlichkeitsstellen mit negativem Imaginärteil, welche später noch gebraucht wird.



Gemäss dem Residuensatz ist das komplexe Wegintegral $\oint_\gamma\frac{3z^2}{1+e^{\frac{1}{z}}}dz$ auf einem in positivem Sinn umlaufenen Weg γ bei sonst holomorphen Funktionen von diesem Weg unabhängig und gleich dem $2\pi i$–fachen der Summe aller Residuen der umschlossenen Unendlichkeitsstellen. Als Weg γ wählen wir einen Halbkreis mit einem Radius 2 und mit dem Mittelpunkt im Ursprung, dessen Durchmesser auf der reellen Achse liegt, wie das in der Graphik oben wiedergegeben ist.

Das Wegintegral auf der reellen Achse von –2 bis 2 ist dabei gerade gleich dem gesuchten Integral I. Für das Integral über den Halbkreis *HK* gilt: $z = 2e^{i\varphi}$, wobei φ von 0 bis π läuft. So wird $\int\limits_{HK} \frac{3z^2}{1+e^{\frac{1}{z}}} dz$, nach Einsetzen von obigem z und Transformation der Differentiale, zum Integral $\int_0^\pi \frac{24ie^{3i\varphi}}{1+e^{+\frac{e^{-i\varphi}}{2}}} d\varphi$.

Damit gilt für das gesuchtes Integral I gemäss Residuensatz:

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{32} - \int_0^\pi \frac{24ie^{3i\varphi}}{1+e^{+\frac{e^{-i\varphi}}{2}}} d\varphi. \qquad \text{(Gl. 1)}$$

"*Mathematica*" kann diesen Ausdruck nicht exakt berechnen, es liefert dafür aber das angenäherte Resultat $I \approx 8 - 4.66516\ 10^{-13}\ i$. Für Physiker ist ein so winziger Imaginärteil natürlich vernachlässigbar, womit $I = 8$ gezeigt ist! Für Mathematiker beginnt hier aber erst die Beweissuche.

Ein Beweis ergibt sich, indem der Halbkreis unter der reellen Achse mitverwendet wird. Für das Wegintegral über den unteren Halbkreis, mit der Substitution $z = 2e^{i(\varphi+\pi)}$ und Anpassung der Differentiale, erhalten wir das Integral $\int_0^\pi \frac{24i \cdot e^{3i(\varphi+\pi)}}{1+e^{+\frac{e^{-i(\varphi+\pi)}}{2}}} d\varphi$, und nach Vereinfachung des Integranden das Integral $\int_0^\pi \frac{-24ie^{3i\varphi}}{1+e^{-\frac{e^{-i\varphi}}{2}}} d\varphi$.

Die Summe der Residuen aller Unendlichkeitsstellen unterhalb der reellen Achse ist ja ebenfalls $\frac{1}{32}$: So wird $2\pi i \cdot \left(\frac{1}{32}\right) = -I + \int_0^\pi \frac{-24ie^{3i\varphi}}{1+e^{-\frac{e^{-i\varphi}}{2}}} d\varphi$. Das negative Vorzeichen bei I in dieser Gleichung kommt daher, dass der untere Halbkreis in positivem Drehsinn, sein Durchmesser auf der reellen Achse aber von 2 bis –2, also rückwärts, durchlaufen wird.

Damit gilt für unser gesuchtes Integral I auch:

$$I = \int_0^\pi \frac{-24ie^{3i\varphi}}{1+e^{-\frac{e^{-i\varphi}}{2}}} d\varphi - 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{32}\right). \qquad \text{(Gl. 2)}$$

Das ist numerisch angenähert auch gleich 8, bis auf etwa einen halben positiven Billionstel von i ! Mit den beiden Gleichungen Gl. 1 und Gl. 2 zusammen erhalten wir den folgenden exakten Term für $2I$:

$$2I = -\int_0^\pi \frac{24ie^{3i\varphi}}{1+e^{+\frac{e^{-i\varphi}}{2}}} d\varphi + \int_0^\pi \frac{-24ie^{3i\varphi}}{1+e^{-\frac{e^{-i\varphi}}{2}}} d\varphi$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich wunderbar zu $\int_0^\pi (-24)ie^{3i\varphi} d\varphi$ vereinfachen, mit dem Resultat $2I = \left\lfloor -8e^{3i\varphi} \right\rfloor_0^\pi = 8-(-8) = 16$, woraus sofort folgt:

$$I = \int_{-2}^2 \frac{3x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx = 8. \qquad \text{QED!}$$

Und als Bonus ergibt sich (analog) auch noch die Verallgemeinerung (für $a > \frac{1}{\pi}$): $\int_{-a}^a \frac{3x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx = a^3$.

---

(1): Leonhard Euler, E41: "De summis serierum reciprocarum", publiziert im Jahre 1740.