Ergänzungen zur Menschenpyramide im Bulletin Nr. 144 oder Erweiterung des Pascal-Schemas über sein Dreieck hinaus

Peter Gallin, peter@gallin.ch

Im Zentrum meiner Untersuchungen zur Menschenpyramide im Bulletin Nr. 144 auf Seiten 24 bis 27 stand die folgende Tabelle, welche die äussere Struktur eines Pascal-Dreiecks aufweist. Anstelle der Binomialkoeffizienten stehen hier Zahlen $x_{n,s}$ in der Zeile n und der Spalte s. Das Rekursionsgesetz lautet ähnlich wie bei den Binomialkoeffizienten mit dem Unterschied, dass nach der Addition benachbarter Zahlen noch die Zweierpotenz der Nachfolgezeile dazu addiert wird: Es gilt also im Innern des Dreiecks die Rekursionsformel

$$x_{n+1,s+1} = x_{n,s} + x_{n,s+1} + 2^{n+1} \ , \quad \text{wobei} \quad 0 \leq s < n \ .$$

Am Rand des Pascal-Schemas stehen die um 1 verkleinerten Zweierpotenzen:

$$x_{n,0} = x_{n,n} = 2^n - 1$$

		s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n	2er-Potenz																		
0	1		0																
1	2		1	1															
2	4		3	6	3														
3	8		7	17	17	7													
4	16		15	40	50	40	15												
5	32		31	87	122	122	87	31											
6	64		63	182	273	308	273	182	63										
7	128		127	373	583	709	709	583	373	127									
8	256		255	756	1212	1548	1674	1548	1212	756	255								
9	512		511	1523	2480	3272	3734	3734	3272	2480	1523	511							
10	1024		1023	3058	5027	6776	8030	8492	8030	6776	5027	3058	1023						
11	2048		2047	6129	10133	13851	16854	18570	18570	16854	13851	10133	6129	2047					
12	4096		4095	12272	20358	28080	34801	39520	41236	39520	34801	28080	20358	12272	4095				
13	8192		8191	24559	40822	56630	71073	82513	88948	88948	82513	71073	56630	40822	24559	8191			
14	16384		16383	49134	81765	113836	144087	169970	187845	194280	187845	169970	144087	113836	81765	49134	16383		
15	32768		32767	98285	163667	228369	290691	346825	390583	414893	414893	390583	346825	290691	228369	163667	98285	32767	
16	65536		65535	196588	327488	457572	584596	703052	802944	871012	895322	871012	802944	703052	584596	457572	327488	196588	65535

Die explizite Formel für $x_{n,s}$ im Bulletin Nr. 144 ist alles andere als einfach und einprägsam, so dass ich schon damals auf eine Vereinfachung hoffte. Die Idee dazu hat mir nun der Mathematiker Remo Bernhardsgrütter von der Hochschule für Technik in Rapperswil gegeben, dem an dieser Stelle grosser Dank gebührt. Endlich ist der Mahnspruch meines verehrten Mathematikprofessors Eduard Stiefel (1909–1978) von der ETH Zürich wahr geworden: Quod verum simplex!

Bevor ich nun die explizite Berechnung von $x_{n,s}$ gemäss der Idee von Remo Bernhardsgrütter herleite, möchte ich anhand des Pascal-Dreiecks zeigen, wie dessen Erweiterung über das eigentliche Dreieck hinaus fruchtbare Einsichten zutage fördern kann. Auch diese Idee hatte ich als junger Mathematiklehrer von einem Kollegen vor vielen Jahren erhalten: Henri Deller (1937–2017) von der Kantonsschule Zürcher Oberland steckte mir damals ein Blatt zu, auf dem er das Pascal-Dreieck in alle Richtungen erweitert hatte, wie es die nächste Tabelle zeigt. Links und rechts des eigentlichen Dreiecks werden Nullen platziert, was nicht weiter erstaunlich ist. Damit gilt die Rekursionsformel des Pascal-Dreiecks auch für die Randzahlen Eins. Wenn nun aber gegen oben eine der beiden Flanken aus Einsen verlängert wird und das Rekursionsgesetz weiterhin gelten soll, so füllen sich die horizontalen Zeilen oberhalb des Dreiecks mit alternierenden Zahlen und zwar bis ins Unendliche.

n																						
-6						0		0		0		1		-6		21		-56		126		-252
-5					0		0		0		1		-5		15		-35		70		-126	
-4				0		0		0		1		-4		10		-20		35		-56		
-3			0		0		0		1		-3		6		-10		15		-21			
-2		0		0		0		1		-2		3		-4		5		-6				
-1	0		0		0		1		-1		1		-1		1		-1					
0		0		0		1		0		0		0		0		0						
1	0		0		1		1		0		0		0		0							
2		0		1		2		1		0		0		0								
3	0		1		3		3		1		0		0									
4		1		4		6		4		1		0										
5	1		5		10		10		5		1											

Während im ursprünglichen Bereich des Pascal-Dreiecks zeilenweise die Koeffizienten der Entwicklung von $(1+x)^n$ für positive n abgelesen werden können, erscheinen nun oberhalb zeilenweise die Koeffizienten der formalen Potenzreihen für negative n:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \dots$$

$$(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - 21x^5 + \dots$$

usw.

Man überprüft die Korrektheit dieser Entwicklungen am besten mittels Ableiten der Reihen.

Die Kernidee der Erweiterung des Dreiecks führt nun aber auch im Fall der Zahlen $x_{n,s}$ zum Ziel. Zuerst schreiben wir einen Teil der ursprünglichen Tabelle in die übliche symmetrische Dreiecksform um, so dass die Spalten mit konstantem s diagonal nach unten links laufen:

n	2er-Potenz													s=0		s=1		s=2		s=3		s=4		s=5		s=6
0	1													0												
1	2												1		1											
2	4											3		6		3										
3	8										7		17		17		7		u							
4	16									15		40		50		40		15								
5	32								31		87		122		122		87		31							
6	64							63		182		273		308		273		182		63						
7	128								373		583		709		709		583		373							
8	256									1212		1548		1674		1548		1212								
9	512										3272		3734		3734		3272									
10	1024											8030		8492		8030										
11	2048												18570		18570											
12	4096													41236												

Nun untersuchen wir, wie beispielsweise die Zahl 273 ($n = 6$ und $s = 4$) aufgebaut wird. Gemäss Rekursionsgesetz gilt: $273 = 122 + 87 + 64$. Gehen wir einen Schritt weiter und zerlegen 122 und 87 in ihre Bestandteile aus der darüber liegenden Zeile:

$$273 = (50 + 40 + 32) + (40 + 15 + 32) + 64 = 1 \cdot 50 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 64$$

Der nächste Schritt wird insofern vereitelt, als dass wir das Dreieck verlassen müssten, weil wir mit der Zahl 15 bereits am Rand sind. Das ist der Moment, wo wir rechts oberhalb der Zahl 15 eine Zahl u einsetzen müssen, so dass das Rekursionsgesetz immer noch gilt: $7 + u + 16 = 15$. Also ist $u = -8$, was genau der negativen Zweierpotenz dieser Zeile entspricht. Nun können wir unsere Zahl 273 weiter zerlegen und erhalten in der Zeile 3 mit der Zahl u und den Binomialkoeffizienten schliesslich:

$$273 = 1 \cdot 17 + 3 \cdot 17 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot (-8) + 3 \cdot 64$$

Wenn wir das Verfahren bis ganz oben weiter treiben wollen, müssen wir also das Dreieck seitlich mit geeigneten Zahlen ergänzen. Dabei zeigt es sich, dass in jeder Zeile sowohl rechts als auch links die am Dreieck angrenzende Zahl die negative Zweierpotenz der entsprechenden Zeile sein muss. Danach folgt in dieser Zeile das Dreifache, das Fünffache, das Siebenfache dieser Potenz. Dies immer mit dem Ziel, das Rekursionsgesetz auch ausserhalb der Dreiecks zu erfüllen. So erhalten wir die folgende erweiterte Tabelle:

n	2er-Potenz													s=0		s=1		s=2		s=3		s=4		s=5		s=6
0	1	-11		-9		-7		-5		-3		-1		0		-1		-3		-5		-7		-9		-11
1	2		-18		-14		-10		-6		-2		1		1		-2		-6		-10		-14		-18	
2	4			-28		-20		-12		-4		3		6		3		-4		-12		-20		-28		
3	8				-40		-24		-8		7		17		17		7		-8		-24		-40			
4	16					-48		-16		15		40		50		40		15		-16		-48				
5	32						-32		31		87		122		122		87		31		-32					
6	64							63		182		273		308		273		182		63						
7	128								373		583		709		709		583		373							
8	256									1212		1548		1674		1548		1212								
9	512										3272		3734		3734		3272									
10	1024											8030		8492		8030										
11	2048												18570		18570											
12	4096													41236												

Das Verfahren nähert sich dem Ziel. Wir zerlegen 273 nun in der Zeile 2, Zeile 1 und Zeile 0:

$$273 = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) + 1 \cdot (-12) + 4 \cdot 64$$

$$273 = 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 10 \cdot (-2) + 5 \cdot (-6) + 1 \cdot (-10) + 5 \cdot 64$$

$$273 = 1 \cdot (-3) + 6 \cdot (-1) + 15 \cdot 0 + 20 \cdot (-1) + 15 \cdot (-3) + 6 \cdot (-5) + 1 \cdot (-7) + 6 \cdot 64$$

Damit kann man 273 mit einem Skalarprodukt schreiben:

$$273 = \left[\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \binom{6}{2}, \binom{6}{3}, \binom{6}{4}, \binom{6}{5}, \binom{6}{6}\right] \circ [-3, -1, 0, -1, -3, -5, -7] + 6 \cdot 64$$

Die Verallgemeinerung ist nicht besonders schwer. Man muss bei gegebenen n und s von der Zahl $x_{n,s}$ diagonal nach links oben und nach rechts oben fortschreiten, bis man auf der Zeile 0 angekommen ist. Dort stehen jene negativen ungeraden Zahlen, welche den zweiten Vektor im Skalarprodukt begrenzen. Die rechte Grenze ist $-(2s-1) = 1-2s$. Die linke Grenze ist $-(2(n-s)-1) = 1-2(n-s)$. Damit ergibt sich folgende Schlussformel für $n > s > 0$:

$$x_{n,s} = \left[\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}\right] \circ [1-2(n-s), 3-2(n-s), \dots, -1, 0, -1, -3, \dots, 1-2s] + n \cdot 2^n$$

oder

$$x_{n,s} = n \cdot 2^n - \left[\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}\right] \circ [2(n-s)-1, 2(n-s)-3, \dots, 1, 0, 1, 3, \dots, 2s-1]$$

Für $n = s$ fällt der linke Teil des rechten Vektors weg und für $s = 0$ ist es der rechte Teil. Der linke Teil des rechten Vektors enthält $n-s$ Komponenten, der rechte Teil s Komponenten, womit der ganze Vektor zusammen mit der zentralen Null $n+1$ Komponenten enthält, so wie auch der linke Vektor.

Schliesslich möchte man eine noch geschlossenere Formel angeben. Dies gelingt, indem wir zwei Summen bilden, eine von links her und eine von rechts her. Dabei können wir Gebrauch machen von der Symmetrie der Binomialkoeffizienten, so dass diese in beiden Summen bei der unteren Zahl 0 beginnen:

$$\boxed{x_{n,s} = n \cdot 2^n - \sum_{i=0}^{n-s-1} \binom{n}{i}(2(n-s-i)-1) - \sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i}(2(s-i)-1)} \qquad (1)$$

Hier können nun die Fälle $n = s$ und $s = 0$ zugelassen werden, weil dann die entsprechenden Summen wegfallen.

Für weitere Vereinfachungen kürzen wir die Summen mit (I) und (II) ab:

$$x_{n,s} = n \cdot 2^n - (I) - (II)$$

Mit Hilfe der Identitäten

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \quad \text{und} \quad n \cdot 2^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i}$$

gelingt es, die erste Summe (I) umzubauen auf eine Summe, bei der schliesslich der Index wie bei der zweiten Summe von 0 bis $s-1$ läuft.

$$(I) = \sum_{i=0}^{n-s-1} \binom{n}{i} (2(n-s-i)-1) = (2n-2s-1)\left(2^n - \sum_{i=n-s}^{n} \binom{n}{i}\right) - 2\left(n \cdot 2^{n-1} - \sum_{i=n-s}^{n} i \cdot \binom{n}{i}\right)$$

Substituieren wir den Summationsindex durch $i = n - j$ und schreiben dann wieder i statt j, ergibt sich nach dem Umordnen den Summen:

$$(I) = (2n-2s-1)\left(2^n - \sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i}\right) - 2\left(n \cdot 2^{n-1} - \sum_{i=0}^{s} (n-i) \cdot \binom{n}{i}\right)$$

Öffnen wir die grossen Klammern, so fällt $2n \sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i}$ weg. Schreiben wir den letzten Summanden in beiden Summen separat, so fällt $2s\binom{n}{s}$ weg, und es ergibt sich die gewünschte Form:

$$(I) = (n-2s-1) \cdot 2^n + \binom{n}{s} + (2s+1)\sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i} - 2\sum_{i=0}^{s-1} i \cdot \binom{n}{i}$$

Jetzt passen die zwei Summen gut zueinander, denn

$$(II) = \sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i} (2(s-i)-1) = (2s-1)\sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i} - 2\sum_{i=0}^{s-1} i \cdot \binom{n}{i} \ .$$

So erhalten wir schliesslich eine zweite, verhältnismässig einfache Schlussformel:

$$\boxed{x_{n,s} = n \cdot 2^n - (I) - (II) = (2s+1) \cdot 2^n - \binom{n}{s} - 4\sum_{i=0}^{s-1} (s-i) \cdot \binom{n}{i}} \tag{2}$$

Die Kontrolle für $n = 6$ und $s = 4$ sieht dann folgendermassen aus:

$$x_{6,4} = 9 \cdot 64 - 15 - 4(4 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 15 + 1 \cdot 20) = 273$$

Leider ist bei dieser Formel (2) die Symmetrie $x_{n,s} = x_{n,n-s}$ nicht mehr so direkt ersichtlich wie bei der ersten Formel. Trotzdem gilt natürlich auch

$$x_{6,4} = x_{6,2} = 5 \cdot 64 - 15 - 4(2 \cdot 1 + 1 \cdot 6) = 273 \ .$$

Nun hat Remo Bernhardsgrütter ab Formel (1) einen anderen Weg zur Vereinfachung eingeschlagen, indem er diejenigen Teile der beiden Summen in (1), welche nur reine Binomialkoeffizienten enthalten, getrennt bearbeitet und so dank der Symmetrie der Zeilen im Pascal-Dreieck zu einer Zweierpotenz zusammenfassen kann:

$$x_{n,s} = n \cdot 2^n - \sum_{i=0}^{n-s-1} \binom{n}{i}(2(n-s-i)) - \sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i}(2(s-i)) + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-s-1} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i}}_{2^n} - \binom{n}{s}$$

$$x_{n,s} = (n+1) \cdot 2^n - \binom{n}{s} - 2\sum_{i=0}^{n-s-1} \binom{n}{i}(n-s-i) - 2\sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i}(s-i)$$

Nun fasst er ein besonderes Ziel ins Auge, nämlich die Identität

$$\binom{n}{i}(n-i) = n\binom{n-1}{i}$$

anwenden zu können:

$$x_{n,s} = (n+1)\cdot 2^n - \binom{n}{s} - 2\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-s-1} \binom{n}{i}(n-i) - s\sum_{i=0}^{n-s-1} \binom{n}{i}\right) - 2\cdot\left(\sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i}(n-i) - (n-s)\sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i}\right)$$

$$x_{n,s} = (n+1)\cdot 2^n - \binom{n}{s} + 2s\sum_{i=0}^{n-s-1} \binom{n}{i} + 2(n-s)\sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i} - 2\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-s-1} \binom{n}{i}(n-i) + \sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i}(n-i)\right)$$

Und wieder benützt man die Symmetrie der Zeilen im Pascal-Dreieck:

$$x_{n,s} = (n+1)\cdot 2^n - \binom{n}{s} + 2s\sum_{i=0}^{n-s-1} \binom{n}{i} + 2(n-s)\sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i} - 2\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{(n-1)-s} n\binom{n-1}{i} + \sum_{i=0}^{s-1} n\binom{n-1}{i}\right)}_{n\cdot 2^{n-1}}$$

Durch Zusammenfassen aller Zweierpotenzen gelangt er zur dritten Schlussformel geordnet nach aufsteigenden Binomialkoeffizienten der n-ten Zeile:

$$\boxed{x_{n,s} = 2^n + 2(n-s)\sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i} - \binom{n}{s} + 2s\sum_{i=s+1}^{n} \binom{n}{i}} \qquad (3)$$

Machen wir die Probe für $n = 6$ und $s = 4$:

$$x_{6,4} = 64 + 2\cdot 2\cdot(\mathbf{1} + \mathbf{6} + \mathbf{15} + \mathbf{20}) - \mathbf{15} + 2\cdot 4\cdot(\mathbf{6} + \mathbf{1}) = 273$$

Für kleine s, nämlich $2s \leq n$, was ja wegen $x_{n,s} = x_{n,n-s}$ stets erreicht werden kann, heben sich dank der Symmetrie der Zeilen im Pascal-Dreieck gewisse Binomialkoeffizienten mit dem Faktor $2s$ weg und man erhält eine Schlussformel, die man sich sogar für das Kopfrechnen merken kann:

$$\boxed{x_{n,s} = 2^n + 2n\sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i} - \binom{n}{s} + 2s\sum_{i=s+1}^{n-s} \binom{n}{i} \quad \text{, wobei } 2s \leq n} \qquad (4)$$

Zum Schluss soll auch hier die Probe gemacht werden:

$$x_{6,2} = 64 + 2\cdot 6\cdot(\mathbf{1} + \mathbf{6}) - \mathbf{15} + 2\cdot 2\cdot(\mathbf{20} + \mathbf{15}) = 273$$

Fazit: Quod verum simplex!