Von Bretschneider zu Brahmagupta, Heron und Pythagoras

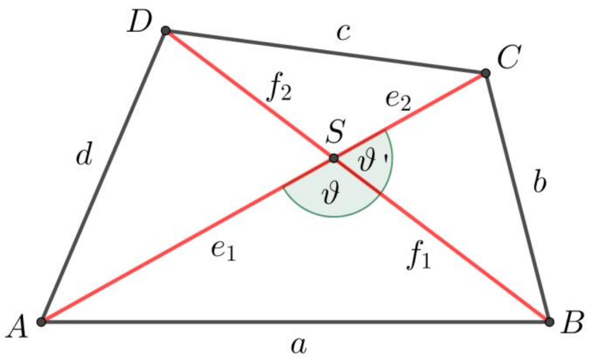
H.U. Keller, vorm. MNG, hukkeller@bluewin.ch

Wie kann der Flächeninhalt eines allgemeinen, ebenen Vierecks aus seinen Seiten und seinen Diagonalen berechnet werden? Die Herleitung einer solchen Formel – der Formel von Bretschneider – wird hier präsentiert.

Als Folgerungen daraus ergeben sich weitere, meist besser bekannte Formeln für die Flächeninhalte von Sehnenvierecken, von beliebigen und von rechtwinkligen Dreiecken.

Herleitung der Formel von Bretschneider

Mit den Bezeichnungen gemäss Fig. 1 unten gilt für die Flächeninhalte der vier Teildreiecke (wobei verwendet wird, dass $\sin(\vartheta) = \sin(\vartheta')$ ist):



$$A_{ABS} = \frac{1}{2} e_1 f_1 \sin(\vartheta);\; A_{BCS} = \frac{1}{2} e_2 f_1 \sin(\vartheta);$$

$$A_{CDS} = \frac{1}{2} e_2 f_2 \sin(\vartheta);\; A_{DAS} = \frac{1}{2} e_1 f_2 \sin(\vartheta).$$

Fig. 1: Bezeichnungen beim Viereck *ABCD*.

Der gesamte Inhalt der Vierecksfläche wird damit $A_{ABCD} = \frac{1}{2} ef \sin(\vartheta)$, und für sein Quadrat ergibt sich:

$$16\, A_{ABCD}^2 = 4e^2 f^2 \sin^2(\vartheta) = 4e^2 f^2 \left(1 - \cos^2(\vartheta)\right) = 4e^2 f^2 - \left(2ef \cos(\vartheta)\right)^2.$$

Im Term $2ef \cos(\vartheta)$ wird nun jede Diagonale durch die Summe ihrer Teilstücke ausgedrückt und dieser neue Term vollständig ausmultipliziert:

$$2ef \cos(\vartheta) = 2\left(e_1 + e_2\right)\left(f_1 + f_2\right)\cos(\vartheta) =$$
$$2e_1 f_1 \cos(\vartheta) - 2e_2 f_1 \cos(\vartheta') + 2e_2 f_2 \cos(\vartheta) - 2e_1 f_2 \cos(\vartheta').$$

Mit der Anwendung des Kosinus–Satzes bei jedem dieser vier Terme, und mit $\cos(\vartheta') = -\cos(\vartheta)$, folgt:

$$2ef \cos(\vartheta) = \left(-a^2 + e_1^2 + f_1^2\right) + \left(b^2 - e_2^2 - f_1^2\right) + \left(-c^2 + e_2^2 + f_2^2\right) + \left(d^2 - e_1^2 - f_2^2\right).$$

Dies kann sofort zu $2ef\cos(\vartheta)=-a^2+b^2-c^2+d^2$ vereinfacht werden. Somit ergibt sich für das Quadrat des Flächeninhalts $16A_{ABCD}^2=4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2$, und damit für den Flächeneinhalt A_{ABCD} selber:

$$\boxed{\text{Beliebiges Viereck } ABCD\text{: } \Rightarrow A_{ABCD}=\frac{\sqrt{4e^2f^2-\left(a^2-b^2+c^2-d^2\right)^2}}{4}}$$

Dies ist die **Formel von Bretschneider** für den Flächeninhalt eines beliebigen Vierecks *ABCD*, ausgedrückt durch seine Seiten und seine Diagonalen. Die Formel gilt auch für Vierecke mit einspringenden Ecken!

[**Carl Anton Bretschneider** (* 27. Mai 1808 in Schneeberg; † 6. November 1878 in Gotha) war ein deutscher Mathematiker und Jurist.]

Anwendung auf Sehnenvierecke

Gemäss dem **Ptolemäischen Lehrsatz** gilt für Sehnenvierecke die Identität $ef=ac+bd$.

[**Claudius Ptolemäus** (* um 100, möglicherweise in Ptolemais Hermeiou, Ägypten; † nach 160, vermutlich in Alexandria, war ein griechischer Mathematiker, Geograph, Astronom, Astrologe, Musiktheoretiker und Philosoph.]

Die Formel von Bretschneider ergibt, zusammen mit dem Ptolemäischen Lehrsatz für Sehnenvierecke, für das Quadrat des Flächeninhaltes den Term $A_{ABCD}^2=\dfrac{4(ac+bd)^2-\left(a^2-b^2+c^2-d^2\right)^2}{16}$.

Die Ausmultiplikation eines Terms $(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)$ (mit $s:=\dfrac{a+b+c+d}{2}$) und Vergleich mit dem ausmultiplizierten Term $A_{ABCD}^2=\dfrac{4(ac+bd)^2-\left(a^2-b^2+c^2-d^2\right)^2}{16}$ zeigt, dass diese beiden Terme identisch sind! Folglich gilt bei jedem Sehnenvierecken *ABCD*:

$$\boxed{\text{Sehnenviereck } ABCD\text{: } \Rightarrow A_{ABCD}=\sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}}$$

Dies ist die **Formel von Brahmagupta**, die sich so als Spezialfall der Formel von Bretschneider ergibt.

[**Brahmagupta** (Devanagari: ब्रह्मगुप्त; * 598; † nach 665) war ein indischer Mathematiker und Astronom.]

Anwendung auf beliebige Dreiecke

Diese Formel von Brahmagupta erinnert nicht von ungefähr an die Formel von Heron zur Berechnung des Flächeninhalts A_{ABC} eines Dreiecks *ABC* mit gegebenen Seiten *a*, *b* und *c*. Da jedes Dreieck einen Umkreis hat, kann ein beliebiges Dreieck *ABC* als degeneriertes Sehnenviereck angesehen werden, bei dem der Punkt *D* mit dem Punkt *A* zusammenfällt, womit folglich die Seite *d* gleich Null wird. Damit vereinfacht sich die Formel von Brahmagupta bei einem Dreieck (wieder mit *s* gleich dem halben Dreiecksumfang) zu:

$$\boxed{\text{Beliebiges Dreieck } ABC\text{: } \Rightarrow A_{ABC}=\sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot s}}$$

Dies ist die **Formel von Heron**, die sich so als Spezialfall aus der Formel von Brahmagupta ergibt.

[**Heron von Alexandria** (altgriechisch Ἥρων *Hḗrōn*, genannt *Mechanicus* [ὁ μηχανικός *ho mēchanikós*]; † nach 62) war ein griechischer Mathematiker und Ingenieur.]

Anwendung auf rechtwinklige Dreiecke

Was ergibt sich, wenn die mit der Formel von Heron berechnete Dreiecksfläche zufällig gerade gleich $\bar{A}_{ABC} = \frac{1}{2}ab$ sein sollte? Dies ist natürlich genau dann der Fall, wenn *a* senkrecht auf *b* steht. Dann gilt für das Quadrat der Dreiecksfläche nach Heron immer noch $A^2_{ABC} = s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)$; wird darin $s = \frac{a+b+c}{2}$ eingesetzt und ausmultipliziert, erhalten wir die folgende Gleichung:

$$A^2_{ABC} = \frac{1}{16}\left(2\,a^2b^2 + 2\,a^2c^2 + 2\,b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4\right) = \frac{1}{4}a^2b^2 = \bar{A}^2_{ABC}\,.$$

Mit der Substitution $x := c^2$ ergibt sich für *x* die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2\,(a^2+b^2)\cdot x + \left(a^2+b^2\right)^2 = 0\,,$$

welche die einzige Lösung $x = c^2 = a^2 + b^2$ hat.

Darum gilt in jedem Dreieck *ABC* mit einem rechten Winkel zwischen den Seiten *a* und *b*:

$$\boxed{\text{Rechtwinkliges Dreieck } ABC \text{ mit } a \perp b: \Rightarrow A_{ABC} = \frac{1}{2}ab \text{ und } a^2 + b^2 = c^2}$$

Das ist der **Satz von Pythagoras,** der sich so als Spezialfall aus der Formel von Heron ergibt.

[**Pythagoras von Samos** (* um 570 v. Chr. auf Samos; † nach 510 v. Chr. in Metapont in der Basilicata) war ein antiker griechischer Philosoph und Mathematiker.]

P.S.: "Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, sie etwas unterhaltsamer zu gestalten." Blaise Pascal.

[**Blaise Pascal** (* 19. Juni 1623 in Clermont-Ferrand; † 19. August 1662 in Paris) war ein französischer Mathematiker, Physiker, Literat und christlicher Philosoph.]

Nachtrag: Alternative Herleitung der Formel von Heron

Die Formel von Heron hätte auch mit Hilfe des Satzes von Pythagoras gefunden werden können. Dies ist mit so hübschen und trickreichen Anwendungen der binomischen Formeln verbunden, dass diese Herleitung hier kurz dargestellt werden soll:

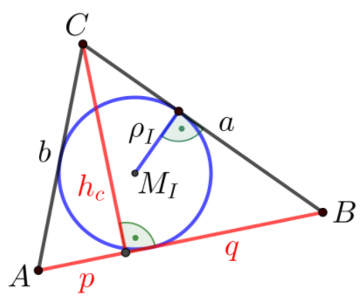


Fig. 2: Bezeichnungen beim Dreieck *ABC*.

Es gilt, mit den Bezeichnungen in Fig. 2 oben, und mit $s := \dfrac{a+b+c}{2}$ und $p+q=c$:

$$h_c^2 = a^2 - q^2 = b^2 - (c-q)^2 .$$

Aus dieser Gleichung lässt sich $q = \dfrac{a^2-b^2+c^2}{2c}$ berechnen.

Damit wird

$$h_c^2 = (a-q)(a+q) = \left(a - \frac{a^2-b^2+c^2}{2c}\right)\cdot\left(a + \frac{a^2-b^2+c^2}{2c}\right) = \left(\frac{2ac-a^2+b^2-c^2}{2c}\right)\cdot\left(\frac{2ac+a^2-b^2+c^2}{2c}\right).$$

Dieser Term kann, wiederum mit Hilfe von binomischen Formeln, faktorisiert und umgeformt werden zu

$$h_c^2 = \frac{\left(b^2-(a-c)^2\right)\left((a+c)^2-b^2\right)}{4c^2} = \frac{(b-(a-c))\cdot(b+(a-c))\cdot((a+c)-b)\cdot((a+c)+b)}{4c^2} .$$

Der letzte Bruch lässt ich auch schreiben als

$$h_c^2 = \frac{4}{c^2}\cdot\frac{b-(a-c)}{2}\cdot\frac{b+(a-c)}{2}\cdot\frac{(a+c)-b}{2}\cdot\frac{(a+c)+b}{2} .$$

Beachten wir weiter, dass beispielsweise $\dfrac{b-(a-c)}{2} = \dfrac{b+c-a}{2} = \dfrac{a+b+c}{2} - a = s-a$ ist, und entsprechende Vereinfachungen für die anderen drei Faktoren gelten, dann ergibt sich mit $A_{ABC}^2 = \dfrac{1}{4}c^2 h_c^2$ sofort die bekannte **Formel von Heron** für den Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks *ABC*:

$$\boxed{\text{Beliebiges Dreieck } ABC \Rightarrow A_{ABC} = \sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot s}}$$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks *ABC* kann auch als $A_{ABC} = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\cdot\rho_I$ berechnet werden, wobei ρ_I sein Inkreisradius ist. So erhalten wir als Bonus dazu auch noch eine **Formel für seinen Inkreisradius**:

$$\boxed{\text{Beliebiges Dreieck } ABC \Rightarrow \text{ Inkreisradius } \rho_I = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}}$$

Literatur:

- Archiv der Mathematik und Physik, Vol. 48 (1868), pp. 245 – 348, G. Dostor.
- The American Mathematical Monthly, Vol. 67, No. 3 (Mar. 1960), pp. 291–292, V. F. Ivanoff.
- Ausarbeitung zum Satz von Brahmagupta, Sommersemester 2018, Thimo Wanders.
- https://de.wikibooks.org/wiki/Beweisarchiv:_Geometrie:_Planimetrie:_Dreieck:_Satz_des_Heron.
- https://de.wikipedia.org/wiki/... für die Lebensdaten der erwähnten Mathematiker.