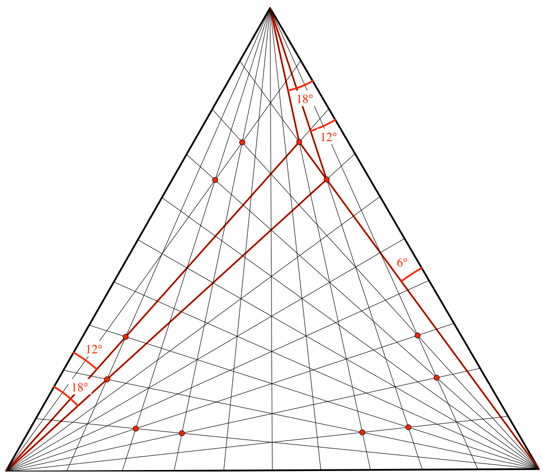
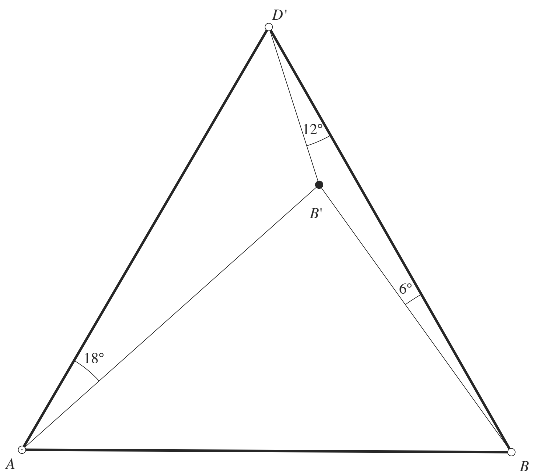
Die 6°-12°-18°-Punkte im gleichseitigen Dreieck

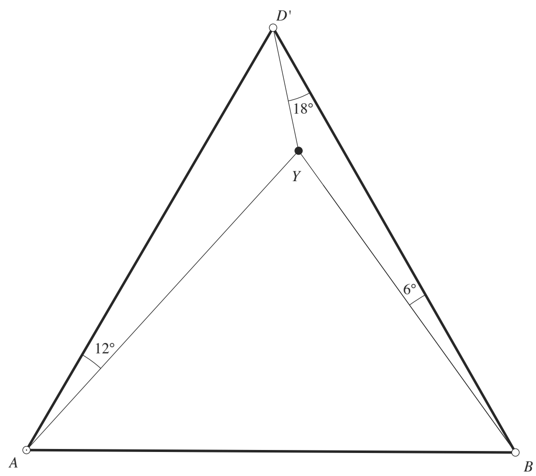
Peter Gallin, peter@gallin.ch, und Heinz Klemenz, hklemenz@geosoft.ch

Es gibt im gleichseitigen Dreieck zwölf bemerkenswerte Punkte, welche die Seiten des Dreiecks unter ganz speziellen Winkeln sichten. Zieht man sämtliche Transversalen durch die Ecken des Dreiecks, welche mit den Seiten die Winkel 6°, 12°, 18°, 24° und 30° einschliessen, so gibt es genau zwölf nicht-triviale Punkte, in denen sich drei Transversalen schneiden. Zum einen sind es sechs Punkte, die dadurch entstehen, dass man eine 6°-Transversale mit einer 12°-Transversalen derselben Dreiecksseite schneidet. Dann liegen diese Schnittpunkte immer auf einer 18°-Transversalen zur dritten Ecke des Dreiecks, was wir in diesem Beitrag in einem ersten Schritt beweisen. Andererseits kann man eine 6°-Transversale und eine 12°-Transversale, die an verschiedenen Dreiecksseiten anliegen, miteinander schneiden und fällt dann auf eine 18°-Transversale zur dritten Ecke, was in einem zweiten Schritt ebenfalls bewiesen wird.





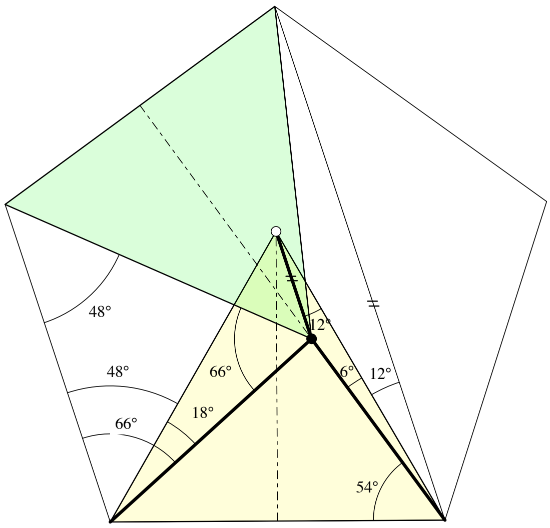
Erster Schritt: 6° und 12° an einer Seite



Zweiter Schritt: 6° und 12° an verschiedenen Seiten

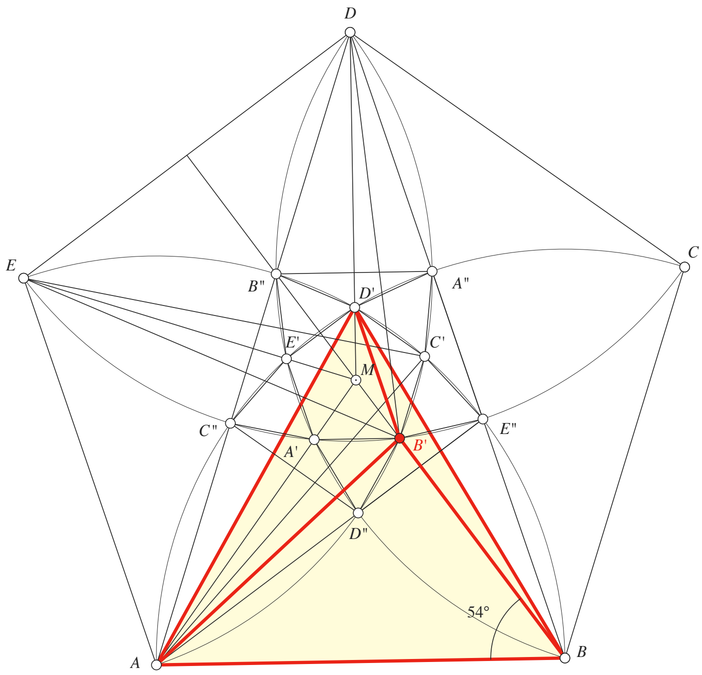
1 Vorbereitung und Look-and-See-Beweis

Die Kernidee des Beweises liegt im Vergleich von gleichseitigem Dreieck und regulärem Fünfeck. Damit schafft man es, einen Beweis für den ersten Fall zu konstruieren, der gleichsam ein Look-and-See-Beweis ist, wie das in der folgenden Abbildung links zu sehen ist. Diese Idee kann nun verallgemeinert werden, indem man im regelmässigen Fünfeck $ABCDE$ alle Kreise mit Mittelpunkten in dessen Ecken und Radien $|AB|$ zeichnet und so die fünf gleichseitigen Dreiecke im Innern des Fünfecks erhält.



Look-and-See-Beweis

Look: $6° = 60° - 54°$ und Spitzenverbindung parallel zu Diagonale: 12°.
See: 18°.



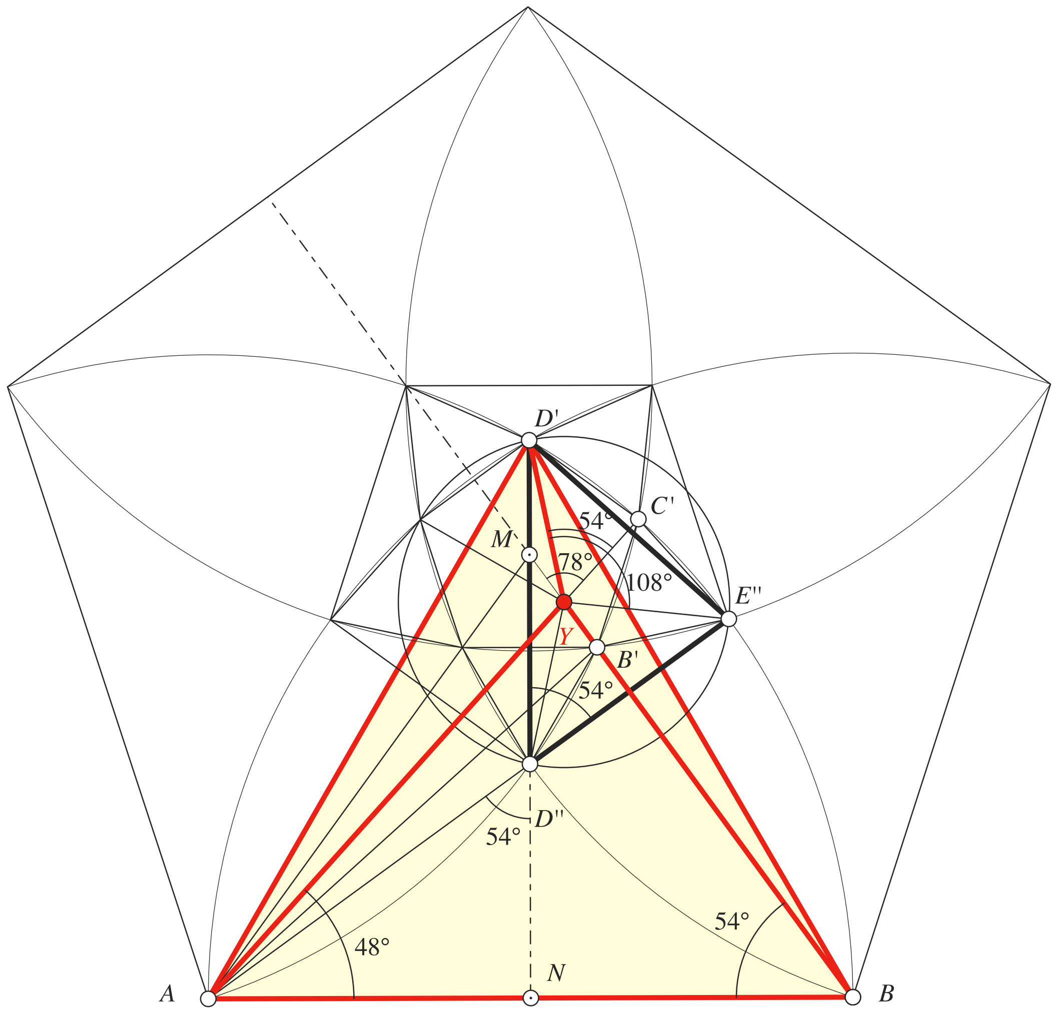
Die Spitzen A', B', C', D' und E' der fünf gleichseitigen Dreiecke bilden ein neues reguläres Fünfeck, welches ein gestrecktes Bild des ursprünglichen Fünfecks mit Zentrum M ist. Das ist aus Symmetriegründen klar. Erstaunlicher ist, dass auf den fünf Seiten des neuen Fünfecks je ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird. Diese Dreiecke erzeugen eine fünfzackige Sternfigur $A''B''C''D''E''$. Um zu beweisen, dass lauter gleichseitige Dreieck aufgesetzt sind, müssen wir nachweisen, dass z. B. die Bogenstücke $B''D'$ und $D'C'$ gleich lang sind, dass also die zugehörigen Zentriwinkel bei A gleich gross sind. Es gilt in den Dreiecken ABD' und ABM, dass $\sphericalangle D'AM = 60° - 54° = 6°$. Ebenso gilt in den Dreiecken EAC' und EAM, dass $\sphericalangle C'AM = 6°$. Also ist $\sphericalangle C'AD' = 12°$. Da aber wegen der Fünfeckseigenschaft $\sphericalangle MAB'' = 18°$ ist, folgt, dass auch $\sphericalangle B''AD' = 18° - 6° = 12°$. Aus Symmetriegründen ist dann auch $\sphericalangle E''AC' = 12°$. Der Vollständigkeit halber untersuchen wir noch $\sphericalangle B'AC'$: Da $\sphericalangle B'ED = 60°$, folgt $\sphericalangle B'EA = 108° - 60° = 48°$. Das Dreieck EAB' ist aber gleichschenklig mit Basis AB' und hat demzufolge den Basiswinkel $\sphericalangle B'AE = 66°$. Damit folgt $\sphericalangle B'AC' = 66° - 60° = 6°$. Insgesamt sind also lauter 6°-Winkel bei A entstanden: $\sphericalangle B''AE' = \sphericalangle E'AD' = \sphericalangle D'AM = \sphericalangle MAC' = \sphericalangle C'AB' = \sphericalangle B'AE'' = 6°$, die an die 6°-Transversalen der Einleitung erinnern.[1]

2 Erster Schritt: 6° und 12° an einer Seite

Schauen wir nun den Punkt B' im gleichseitigen Dreieck ABD' genauer an. Für ihn gilt $\sphericalangle B'BD' = 60° - 54° = 6°$. Da $B'D'$ parallel zu AE und BD liegt und $\sphericalangle DBD' = 12°$ gilt, folgt $\sphericalangle B'D'B = 12°$. Schliesslich ist $\sphericalangle B'AD' = 3{\cdot}6° = 18°$, womit gezeigt ist, dass B' ein 6°-12°-18°-Punkt im gleichseitigen Dreieck ABD' ist, was ja im Look-and-See-Beweis schon bewiesen wurde. Damit ist für den ersten Fall, wo der 6°- und der 12°-Winkel an einer Seite des gleichseitigen Dreiecks anschliessen, gezeigt, dass der dritte Winkel 18° beträgt. Im zweiten Fall liegen der 6°- und der 12°-Winkel an verschiedenen Seiten an. Es ist in diesem Fall etwas komplizierter zu beweisen, dass der dritte Winkel dann 18° beträgt. Glücklicherweise können wir auf die Sternfigur zurückgreifen, in der ein Punkt Y gefunden werden kann, der diese Bedingungen erfüllt.

[1]Sämtliche Figuren sind mit der unter www.geosoft.ch frei erhältlichen, plattformunabhängigen und von Heinz Klemenz programmierten Geometrie-Software «Geopro» gezeichnet worden.

3 Zweiter Schritt: 6° und 12° an verschiedenen Seiten



In dieser zweiten Konstruktion haben wir alle Punkte der ersten Figur übernommen. Zusätzlich haben wir jetzt den Punkt Y als Schnittpunkt von AC' und BM definiert. Damit ist schon einmal gewährleistet, dass $\sphericalangle YBD' = 6°$ und $\sphericalangle YAD' = 12°$. Nun ist zu beweisen, dass $\sphericalangle YD'B = 18°$. Dazu betrachten wir das Dreieck $D''E''D'$. Wegen der Symmetrie bezüglich BM sind $|YD''|$ und $|YE''|$ gleich gross. Es gilt aber auch wegen der Symmetrie bezüglich AC' die Gleichheit $|YE''| = |YD'|$. Somit ist Y der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $D''E''D'$. Ein paar Winkelberechnungen führen uns nun zum Ziel.

Von der Fünfeckseigenschaft her wissen wir, dass $\sphericalangle ABM = 54°$. Da AE'' und BM einerseits und $D'N$ und AB andererseits je senkrecht zueinander stehen, muss auch $\sphericalangle AD''N = 54°$ sein. Damit ist $\sphericalangle E''D''D' = 54°$. Das ist ein Peripheriewinkel, dessen Zentriwinkel $E''YD' = 2 \cdot 54° = 108°$ beträgt, womit $\sphericalangle C'YD' = 54°$.

Andererseits haben wir im Dreieck ABY die Winkel $\sphericalangle YAB = 48°$ und $\sphericalangle YBA = 54°$, was zur Folge hat, dass $\sphericalangle AYB = 180° - 48° - 54° = 78°$, was sich sofort auf $\sphericalangle C'YM = 78°$ überträgt. Jetzt kennen wir den Winkel $\sphericalangle MYD' = 78° - 54° = 24°$. Da $\sphericalangle NMB$ Aussenwinkel im Dreieck YMD' ist und 36° beträgt, folgt $\sphericalangle MD'Y = \sphericalangle NMB - \sphericalangle MYD' = 36° - 24° = 12°$. Schliesslich folgt mit $\sphericalangle MD'B = 30°$, dass $YD'B = 30° - 12° = 18°$. Der Punkt Y ist also von der zweiten Sorte der 6°-12°-18°-Punkte im gleichseitigen Dreieck ABD', während der Punkt B' von der ersten Sorte ist.