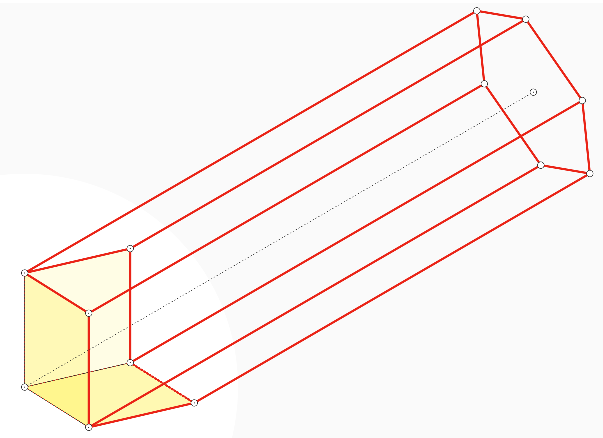
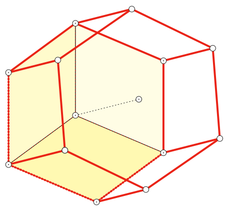
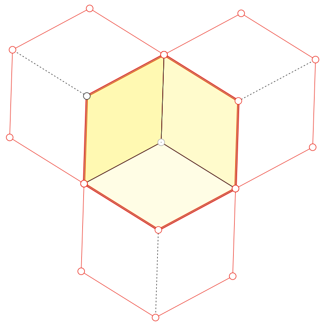
Geometrie der Bienenwabenzellen

Peter Gallin, peter@gallin.ch

Im Internet findet man nur wenige Hinweise dazu, wie die sechskantigen Bienenwabenzellen in der Tiefe abgeschlossen sind. Schaut man in Längsrichtung einer Wabenzelle, erkennt man, dass ihr Abschluss nicht einfach ein flacher Boden ist, sondern aus drei — im dritten Bild unten gelb gefärbten — Flächen besteht. Meine Hypothese war, dass die drei Flächen drei Seitenflächen eines Würfels sind. Deshalb habe ich eine Bienenwabe aufgeschnitten, welche die Bienen spontan hergestellt haben (siehe Foto rechts). Es scheint tatsächlich so zu sein, dass die Bienen es schaffen, drei Quadrate in Form einer Würfelecke als Abschluss jeder Wabenzelle zu bauen. Zur Verdeutlichung habe ich ein solches Quadrat gelb hervorgehoben.

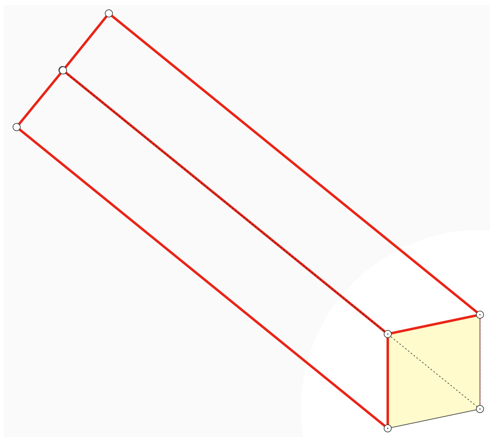


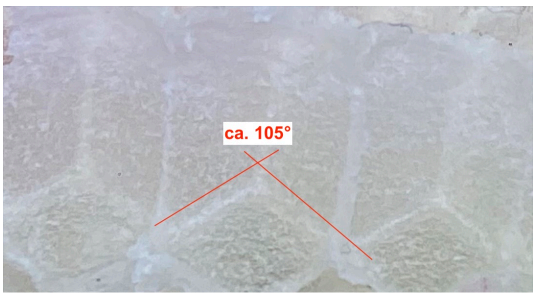




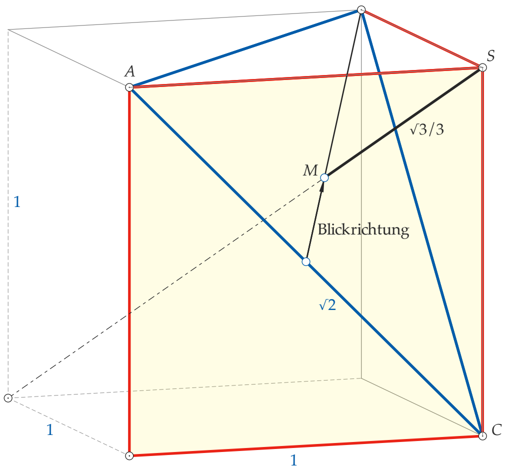
Wenn man den Bienen keine vorgeformte Mittelwand gibt, stellen sie eine Wabe her, die ein abgeflachtes Gebilde ist (siehe Foto oben). Bei dieser Wabe sitzen auf beiden Seiten Zellen. Dabei sind die Zellen der einen Seite der Wabe gegenüber den Zellen der anderen Seite versetzt. Die dritte Figur oben zeigt eine Zelle der Vorderseite als fest ausgezogenes Sechseck und mit feinen Linien die drei Zellen, welche auf der anderen Seite der Wabe gerade angrenzend liegen. Damit können die drei abschliessenden Quadrate von den Zellen auf der gegenüberliegenden Seite übernommen werden. Das bedeutet also, dass von der einspringenden Würfelecke auf der Vorderseite je eines der drei Quadrate für eine der drei Zellen der Rückseite als Abschlussteil dient, so dass von der Rückseite gesehen wieder jede Zelle durch eine einspringende Würfelecke abgeschlossen wird.

Betrachtet man eine in Längsrichtung der Zellen aufgeschnittene Wabe genau von der Seite, so erscheinen die (gelben) Quadrate als leicht verkürzte Rhomben. Die Abbildung rechts zeigt die Theorie und das Foto unten die Realität mit ca. 105°.





Um den stumpf erscheinenden Winkel des Rhombus zu berechnen, betrachten wir den Einheitswürfel mit des Seitendiagonallänge $\sqrt{2}$ und der Raumdiagonallänge $\sqrt{3}$. Die Raumdiagonale wird von der Ebene des in der nebenstehenden Abbildung blau eingezeichneten gleichseitigen Dreiecks bei einem Drittel ihrer Länge geschnitten. Bei einer Blickrichtung senkrecht zur Raumdiagonalen, die ja die Längsrichtung der Zellen angibt, und zu AC erscheint dieses Dreieck projizierend und AC sowie die Höhe MS in wahrer Länge. Der stumpf erscheinende Winkel $\beta = \angle ASC$ berechnet sich daher mit

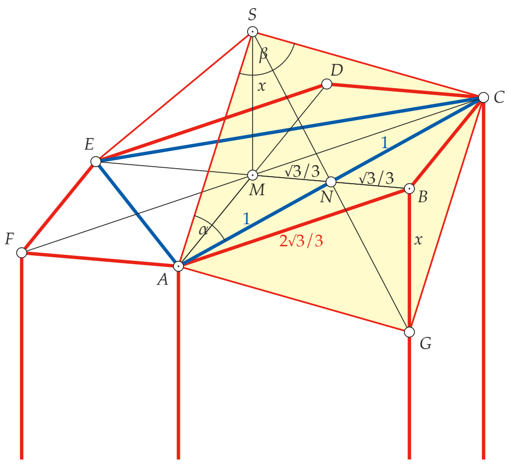


$$\beta = 2\arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right) = 2\arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

d.h. $\beta \approx 101.54^\circ$. An meiner Wabe (siehe vorangehendes Foto) konnte ich einen Winkel von ca. 105° messen, was eine mässige Übereinstimmung ist.

Bereits im 18. Jahrhundert hat man sich zum Abschluss der Zellen Gedanken gemacht. Im arabischen Film mit englischen Untertiteln wird dies anschaulich erzählt (https://www.youtube.com/watch?v=xMGFWJ_rnG0). Es war niemals von einer Würfelecke die Rede, sondern von drei Rhomben, die den Abschluss bilden. Es wurde auch vorgeschlagen, dass der Wachsverbrauch für die Zellwände inklusive der drei Rhomben minimal sein soll. Diese Optimierungsaufgabe wollen wir hier lösen. In der nächsten Abbildung sind die Zellwände mit dem regelmässigen Sechseck $ABCDEF$ dargestellt.

Im Mittelpunkt M wird ein Lot zur Sechsecksebene errichtet mit der Spitze S, so dass $|MS| = x$. Wir wählen $|AC| = 2$, so dass wir mit dem Mittelpunkt N von AC die Länge $|AN| = 1$ verwenden können. Offensichtlich bleibt das Volumen der Zelle unabhängig von x, so dass wir uns einzig auf die Oberfläche konzentrieren können. Die (gelbe) Fläche des Rhombus beträgt



$$F_R = |AC| \cdot |NS| = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + x^2}\,.$$

Von den Zellwänden fällt nun aber ein Stück Oberfläche weg und zwar

$$F_W = |\triangle ABG| + |\triangle BCG| = x \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}\,.$$

So erhalten wir die Zielfunktion $Z_1 = F_R - F_W$, die wir noch zum Gebrauch vereinfachen zu Z_2:

$$Z_1(x) = F_R - F_W = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + x^2} - x \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{oder} \quad Z_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot Z_1(x) = \sqrt{1+3x^2} - x$$

Die Ableitung ist $Z_2' = \frac{3x}{\sqrt{1+3x^2}} - 1 = \frac{3x-\sqrt{1+3x^2}}{\sqrt{1+3x^2}}$. Der Zähler wird Null für $9x^2 = 1 + 3x^2$ d. h. für $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Man überlegt sich direkt, dass Z_2' an der Stelle $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ monoton steigend ist. Daher macht dieser Wert für x den gesamten Wachsverbrauch für Zellwände inklusive Abschluss minimal. Der Winkel des Rhombus beträgt 2α mit $\alpha = \arctan\left(\frac{|SN|}{|NA|}\right) = \arctan\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Damit erhalten wir $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$, was auf den Winkel $2\alpha \approx 70.528779^\circ$ führt. Der stumpfe Winkel des Rhombus beträgt dann $\beta \approx 109.471221^\circ$.

Schaut man sich die Zelle genau von der Seite an — d.h. das blaue Dreieck wird projizierend — dann verkleinert sich der spitze Winkel auf $2\alpha' = 2\arctan(\frac{x}{1}) = 2\arctan(\frac{1}{\sqrt{6}})$, d.h. $2\alpha' \approx 44.415309°$. Der stumpfe Winkel wird dann $\beta' \approx 135.584691°$. Solch flache Winkel konnte ich bei meinen Waben nicht feststellen.

Interessant an dieser Berechnung ist nun allerdings, dass der Winkel des Rhombus exakt jenem entspricht, der bei den Rhomben des Rhombendodekaeders auftritt. Das zeigt sich insbesondere auch darin, dass AG resp. CG mit der Kante BG des sechsseitigen Prismas ebenfalls den Winkel β bzw. 2α einschliessen, was leicht nachgeprüft werden kann:

$$\tan(\angle AGB) = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{x} = 2\sqrt{2} = \tan(2\alpha)$$

Wir betrachen zum Schluss das Rhombendodekaeder als Aufbau auf dem Einheitswürfel. Aus der nachfolgenden Konstruktion erkennt man, dass der halbe spitze Rhombuswinkel in Wirklichkeit tatsächlich $\angle ACS = \alpha = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$ — in Übereinstimmung mit oben — beträgt. Da die Höhe MS hier nur noch $\frac{\sqrt{3}}{6}$, also die Hälfte im Vergleich zu oben, misst, folgt, dass der scheinbare Winkel $\beta' = 2\arctan(\sqrt{6}) \approx 135.584691°$ beträgt (siehe Ansicht ganz rechts). Dieser flache Winkel widerspricht deutlich demjenigen, den ich gemessen habe.