

# Anti-hookesche Federn

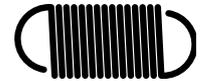
Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

## 1 Einleitung

Im Unterricht behandeln wir – ich nehme an, Sie tun dasselbe – das hookesche Federgesetz  $F = ky$  und tun dann so, als ob es das einzige Federgesetz wäre. Dabei kann die Federkraft  $F$  auch in nicht-proportionaler Weise von der Dehnung  $y$  abhängen, siehe z.B. Abbildung 1

Abbildung 1: Spann- oder Zugfeder

Die Charakteristik dieses Federtyps lautet beispielsweise  $F = F_0 + ky$ , d.h. die Zugkraft an der Feder muss grösser als ein  $F_0$  sein, damit sich die Windungen von einander lösen. Danach wächst die Kraft linear mit der Dehnung.



Kann eine Feder oder ein Spann-Element mit einem beliebigen Kraft-Dehnungsgesetz konstruiert werden?

## 2 Konstruktionselemente

Zwei seriell geschaltete, hookesche Federn mit Federkonstanten  $k_1$  und  $k_2$  haben als System die Federkonstante  $k_{\text{res}}^{-1} = k_1^{-1} + k_2^{-1}$  und erfüllen das hookesche Gesetz ebenfalls. Die Federkennlinie  $F(y)$  einer gewöhnlichen Schraubenfeder seriell kombiniert mit einer Spannfeder weist einen Knick auf: Die Feder wird weicher ab der Kraft, wo sich die Spannfeder dehnt.

Die Federkonstante  $k$  einer gleichmässig eng gewundenen Schraubenfeder mit Drahtdurchmesser  $d$ , mittlerem Wendel-Durchmesser  $D$ , Anzahl Windungen  $N$  und Schermodul  $G$  des Federmaterials ist [1]

$$k = \frac{Gd^4}{8ND^3} \left( 1 + \frac{d^2}{2D^2} \right)$$

Die Federkonstante ist also proportional zur Anzahl Windungen respektive zur Länge der entspannten Feder. Die Federkonstante wird grösser, je kleiner der Federdurchmesser  $D$  ist. In der Kegelstumpffeder wird dies ausgenützt, um die Federkonstante von der Länge abhängig zu machen, siehe Abbildung 2.

Abbildung 2: Kegelstumpf-Feder

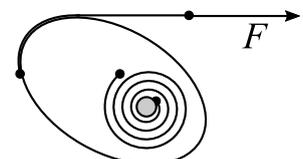
Die Feder ist weicher am breiteren Ende. Wird sie gegen eine Unterlage gedrückt, so liegen die unteren Windungen auf. Da der effektiv noch wirksame Teil kürzer und schmaler geworden ist, steigt die Federkonstante. Die Feder wird um so härter, je stärker sie komprimiert wird.



Das Beispiel in Abbildung 5 zeigt, dass die Kennlinie degressiv oder sogar fallend werden kann.

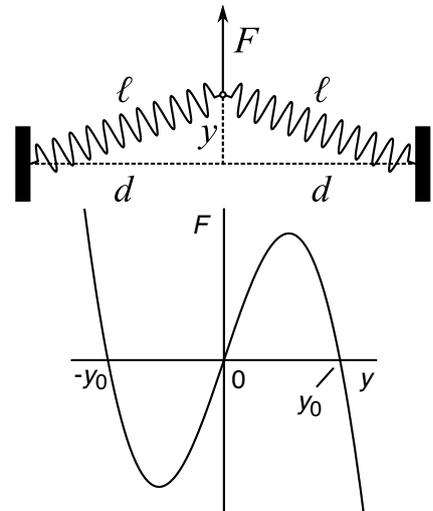
Abbildung 3: Spiralfeder mit exzentrischem Wellrad (Nockenwelle)

Mit dem Winkel des Wellrads ändert der Hebelarm der Zugkraft und variiert die effektive Federkonstante. Die Form des Wellrads beeinflusst die Kennlinie. Bei Compound-Bögen wird analog eine degressive Federkraft erzeugt, damit man beim gespannten Bogen leichter zielen kann.



Die Federkraft kann eine fallende Charakteristik aufweisen. Der Mechanismus in Abbildung 4 soll das Konzept erläutern. Der Apparat besteht aus zwei gleichen Federn mit Federkonstante  $k$  und entspannter Länge  $\ell_0$ . Eine dieser Federn übe die Kraft  $F_1$  aus. Die zwei Federn zusammen erzeugen die Kraft  $F$  am Verbindungsgelenk.

Abbildung 4: Apparat aus zwei Federn, der umschnappen kann  
Zwei Federn sind aussen drehbar verankert und in der Mitte gelenkig verbunden. Die Federn sollen gerade bleiben und nicht ausknicken. Die Federn erzeugen gemeinsam die Kraft  $F$  auf das Gelenk in der Mitte. [2]



$$y_0^2 = \pm \sqrt{\ell_0^2 - d^2} \quad F(y_0) = 0$$

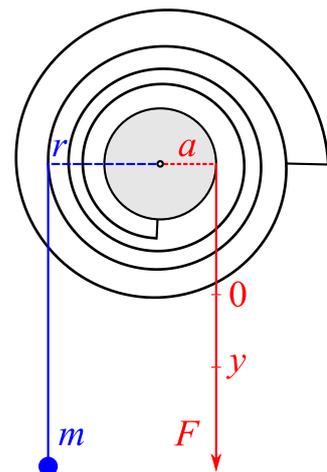
$$F_1 = k(\ell_0 - \ell) \quad \ell = \sqrt{d^2 + y^2}$$

$$\frac{F}{F_1} = \frac{2y}{\ell} \Rightarrow F = \frac{2yk\ell_0}{\sqrt{d^2 + y^2}} - 2yk \quad (\text{Abb. 5})$$

Abbildung 5: Federkraft des Apparats von Abbildung 4 als Funktion der Auslenkung  $y$ . Die Kennlinie ist hochgradig nichtlinear.

Abbildung 6 zeigt ein Spannelement, dessen Zugkraft umgekehrt proportional zum Weg variiert.

Abbildung 6: Ein Wellrad in Form einer hyperbolischen Spirale ist zentriert an einer zylindrischen Achse mit Radius  $a$  befestigt. Der Spiralradius wächst antiproportional zum Drehwinkel:  $r = b/\varphi$ . Ein Körper mit Gewicht  $mg$  hängt an einem Faden, der auf die Spirale gewickelt ist. Um die Achse ist ebenfalls ein Faden gewickelt, an dem die Kraft  $F$  zieht. Im Gleichgewicht kompensieren sich die Drehmomente:  $F a \approx mg r$ . Wenn der Achsen-Faden um die Strecke  $y$  nach unten gezogen wird, dreht sich die Achse und das austarierte Wellrad um  $\varphi = y/a$ . Der Nullpunkt der  $y$ -Achse muss geeignet gewählt werden. Somit gilt



$$F = \frac{mg}{a} \cdot r = \frac{mg}{a} \cdot \frac{b}{\varphi} = \frac{mgb}{y} \sim \frac{1}{y} \quad \text{“Anti-Hooke”}$$

### 3 Schluss

Die angeführten Beispiele zeigen, dass sich die Kraft-Weg-Charakteristik eines Spannelements in vielfältiger Weise beeinflussen lässt. Mit Hilfe eines Finite-Element-Programms können Ingenieure ein Federelement sogar so gestalten, das es in einem bestimmten Bereich eine vorgegebene Federcharakteristik aufweist. Das hooke-sche Federgesetz  $F = ky$  ist nur ein Spezialfall, allerdings ein wichtiger. 10. November 2018, Lie.

### Literatur

[1] P. Mohazzabi et. al., “On the spring constant of a close-coiled helical spring”, Am. J. Phys. 57 (7), July 1989, 639-641  
 [2] <https://www.comsol.com/blogs/can-a-stiffness-be-negative/> (Abruf am 16. Sept. 2018)