

Lagging Pendulum – Trajectoires stables d'un pendule forcé

Emilie Hertig, Gymnase Auguste Piccard, emilie.hertig@bluewin.ch



1. Introduction

Tout au long de l'évolution de la physique, la grande diversité de trajectoires pouvant être observées et modélisées dans différentes situations a fait du pendule un objet d'étude d'un intérêt primordial pour les scientifiques. Un cas particulièrement fascinant du comportement du pendule se distingue lorsque le point d'attache (ou pivot) de ce dernier n'est pas fixe, mais décrit un mouvement oscillatoire. Une telle problématique a déjà été traitée à plusieurs reprises dans la littérature, par exemple par R. Van Dooren [1], Gabriela González [2] ou encore Tom Duncan [3]. Ces recherches font notamment intervenir des pendules subissant une oscillation harmonique forcée horizontale ou verticale, et visent à démontrer l'existence de comportements chaotiques de la masse dans certaines conditions. Le cas d'un pivot décrivant un cercle horizontal, cependant, n'apparaît pas dans ces références ; l'étude d'une telle situation figurait ainsi parmi les problèmes à résoudre pour le IYPT (*International Young Physicists' Tournament*) 2016 à Iekaterinbourg. L'énoncé de la question est le suivant :

« Un pendule est constitué d'un fil solide et d'une masse. Quand le pivot du pendule commence à se mouvoir le long d'une circonférence horizontale, la masse se met à décrire un cercle qui peut avoir un rayon plus petit, dans certaines conditions. Étudiez le mouvement et les trajectoires stables de la masse. »¹

Cet article vise à proposer une solution à ce problème en présentant une description généralisée du mouvement de la masse, obtenue à partir du lagrangien du système. Les orbites circulaires ainsi que leur stabilité y sont étudiées en présence d'une force de frottement dissipative, et les résultats théoriques obtenus, confirmés par l'expérience, sont interprétés qualitativement grâce au théorème de Noether.

2. Equations du mouvement

Les équations du mouvement de la masse sont ici calculées relativement à un référentiel d'inertie dont l'origine O se situe au centre de la trajectoire du pivot. Le système de coordonnées utilisé est représenté en fig. 1. Le pivot décrit un cercle de rayon R ; sa rotation par rapport à l'axe x est décrite par l'angle α , dont l'évolution au cours du temps est connue (vitesse angulaire constante ω_0). La masse se trouve au bout du fil de longueur l ; la direction de ce dernier détermine un angle θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) avec la verticale, qui constitue la première coordonnée généralisée. La seconde coordonnée généralisée, ϕ ,

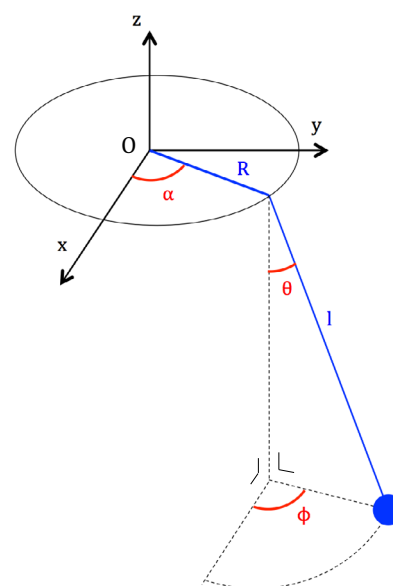


Fig. 1 : système de coordonnées

¹ Traduit de l'anglais à partir du texte original [4].

est contenue dans le plan horizontal et correspond à l'angle azimutal de la masse autour de la verticale passant par le pivot. La position de la masse s'exprime donc à l'aide de deux coordonnées dépendantes du temps, ce qui signifie que le système a deux degrés de liberté. Il est alors possible de déterminer le vecteur position (et par conséquent également le vecteur vitesse, qui en est la dérivée) en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\alpha) + l\sin(\theta)\cos(\phi) \\ R\sin(\alpha) + l\sin(\theta)\sin(\phi) \\ -l\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Cette conversion permet d'exprimer le lagrangien L du système en fonction des deux coordonnées généralisées. La description complète du mouvement de la masse est alors déterminée grâce à l'équation d'Euler-Lagrange appliquée à chacune des coordonnées généralisées q_i :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2)$$

Cette opération aboutit à un système de deux équations différentielles qui permet la détermination de θ et ϕ en fonction du temps pour des conditions initiales données :

$$\begin{cases} l\ddot{\theta} - l\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2 - \omega_0^2 R \cos(\theta)\cos(\omega_0 t - \phi) + g\sin(\theta) = 0 \\ l\sin(\theta)\ddot{\phi} + 2l\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi} - \omega_0^2 R \sin(\omega_0 t - \phi) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

En présence d'une force de frottement dissipative, le principe est le même, mais le membre de droite de (2) devient non nul et correspond alors à la force généralisée. J'ai utilisé ici l'expression d'une force de frottement visqueux entre la masse et l'air, opposée au mouvement et proportionnelle à la vitesse, et qui se définit par la formule $\vec{F} = -\mu\vec{v}$. μ représente ici un coefficient dépendant du milieu considéré. La force généralisée pour chaque coordonnée se définit ainsi, où \vec{r} correspond au vecteur position du point d'application (ici la masse):

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \quad (4)$$

L'équation d'Euler-Lagrange devient alors $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_j$ (5), et le système (3) est modifié en conséquence. Il est encore important de mentionner que, lorsque la vitesse d'un objet est élevée, la force de frottement avec le milieu environnant peut s'exprimer différemment (proportionnelle au carré de la vitesse); cependant, en raison de la linéarisation réalisée dans le cadre de l'analyse de stabilité (voir section 3.2), il paraissait plus adéquat d'utiliser la formule $\vec{F} = -\mu\vec{v}$, qui permet également d'étudier l'influence de la dissipation d'énergie sur la stabilité des solutions circulaires.

3. Trajectoires circulaires

3.1 Description mathématique

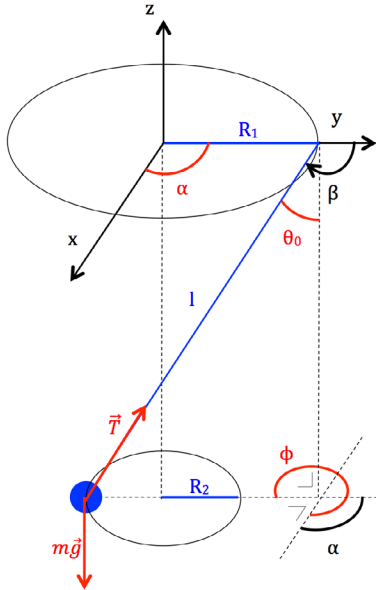


Fig. 2 : schéma de la situation

Il s'agit ici de déterminer quelles sont les solutions des équations du mouvement donnant lieu à des trajectoires circulaires. Une telle solution est premièrement caractérisée par un angle θ constant, ce qui s'exprime par les conditions $\theta(t) = \theta_0$ et $\theta'(t) = 0$. De plus, les vitesses angulaires de la masse et du point d'attache sont égales, ce qui sera vérifié expérimentalement par la suite. En l'absence de force de frottement, le rayon de la trajectoire du pivot et le fil se situent dans le même plan vertical, comme l'indique la fig. 2. Il est important de réaliser qu'une trajectoire circulaire peut être obtenue à partir de deux dispositions différentes : dans le premier cas, le fil est à l'extérieur de la trajectoire du pivot (comme en fig. 1) et la condition d'égalité des périodes implique $\phi(t) = \alpha = \omega_0 t$. Les autres trajectoires circulaires résultent d'une disposition « croisée » telle que représentée en fig. 2 ; dans ce cas, on obtient $\phi(t) = \pi + \alpha$. Une fois ces conditions prises en compte, une des deux équations du mouvement

est trivialement satisfaite ; dans le cas du cercle externe, la deuxième aboutit à :

$$g \tan(\theta_0) - \omega_0^2 (R_1 + l \sin(\theta_0)) = 0 \quad (6)$$

A partir de cette égalité, il est possible de substituer l par $\frac{R_2 - R_1}{\sin(\theta_0)}$ afin de faire apparaître le rayon du cercle décrit par la masse (R_2) dans les équations. On obtient le système :

$$\begin{cases} g \tan(\theta_0) = \omega_0^2 R_2 \\ R_2 - R_1 = l \sin(\theta_0) \end{cases} \quad (7)$$

Ce système a une solution physiquement correcte. Pour la disposition croisée, un signe dans l'équation (6) et l'expression de l sont modifiés. Le nouveau système obtenu, qui a deux solutions positives à partir d'une certaine valeur de ω_0 , est :

$$\begin{cases} g \tan(\theta_0) = \omega_0^2 R_2 \\ R_1 + R_2 = l \sin(\theta_0) \end{cases} \quad (8)$$

Ces équations constituent une prédiction théorique pour le rayon R_2 du cercle, qui sera vérifiée par l'expérience ; le même résultat peut être obtenu par l'analyse des forces agissant sur la masse et l'utilisation de la deuxième loi de Newton. Les trois solutions circulaires obtenues à partir de (7) et (8) sont représentées sur la fig. 3, où apparaît l'angle β orienté entre le fil et l'horizontale pour chacune de ces trajectoires.

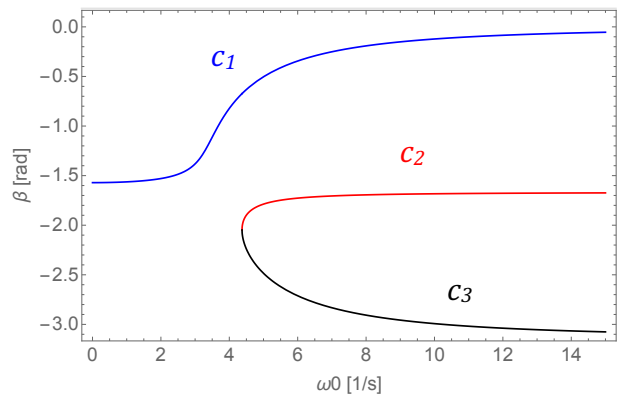


Fig. 3 : angle β en fonction de la vitesse angulaire du pivot pour les trois solutions circulaires

La courbe c_1 correspond à la trajectoire au cours de laquelle le fil est à l'extérieur du cercle décrit par le pivot, et pour laquelle $\beta = -\frac{\pi}{2} + \theta_0$; cette solution existe quelle que soit la fréquence d'excitation du système. Lorsque cette fréquence s'approche de la fréquence angulaire naturelle du pendule, $\sqrt{\frac{g}{l}}$, β subit une brusque augmentation caractéristique du pic de résonance. Les deux autres trajectoires circulaires, caractérisées par la disposition « croisée » pour laquelle $\beta = -\frac{\pi}{2} - \theta_0$, n'apparaissent qu'au-dessus de ce seuil critique. En effet, l'équation $\tan(\theta_0) = \frac{\omega_0^2 l}{g} \sin(\theta_0) - \frac{\omega_0^2 R_1}{g}$, obtenue par substitution à partir de (8), ne peut avoir de solutions comprises entre 0 et 90°, pour lesquelles la tangente est supérieure au sinus, que dans le cas où $\frac{\omega_0^2 l}{g} > 1$. Pour un rayon R_1 donné, il est possible de déterminer plus précisément la vitesse angulaire minimale à partir de laquelle ces trajectoires sont observables en résolvant l'équation ci-dessus pour ω_0 et en calculant le minimum local pour θ_0 positif de la fonction obtenue. L'expression mathématique de cette vitesse angulaire limite est donnée par la formule suivante :

$$\omega_{min} = g(l^{2/3} - R_1^{2/3})^{-\frac{3}{2}} \quad (9)$$

Ce résultat sera également l'objet d'une investigation expérimentale. Il est encore important de noter que seul le cercle c_2 peut avoir un rayon inférieur à R_1 .

Lorsque l'influence de la force de frottement est significative, le fil et le rayon du cercle décrit par le pivot ne se situent plus dans le même plan vertical : en effet, la projection horizontale de la force de tension dans le fil doit alors avoir une composante non nulle dans la direction du mouvement afin de compenser la force dissipative et de permettre l'existence d'un MCU. La fig. 4 illustre cette situation, où la présence de l'angle γ non nul assure l'équilibre des forces tangentielllement au cercle, mais modifie légèrement les prédictions pour le rayon R_2 de la trajectoire de la masse ainsi que pour θ_0 et ϕ . Sachant que $T \cos(\theta_0) = mg$ (par projection sur l'axe z), la deuxième loi de Newton ainsi que le théorème du cosinus appliqués à la situation représentée en fig. 4 aboutissent au système suivant :

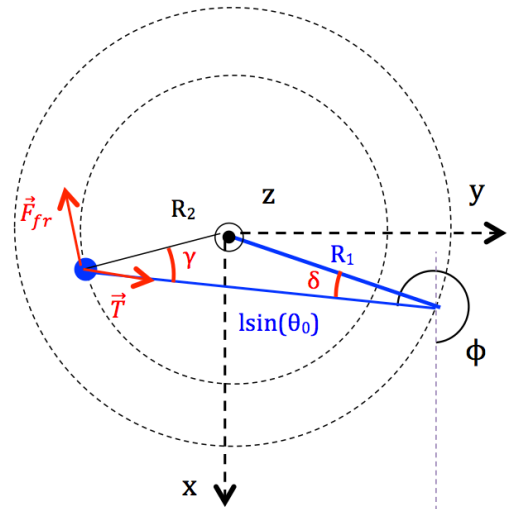


Fig. 4 : situation avec frottements, vue de dessus

$$\begin{cases} mg \tan(\theta_0) \sin(\gamma) = \mu v = \mu \omega_0 R_2 \\ g \tan(\theta_0) \cos(\gamma) = \omega_0^2 R_2 \\ R_1^2 = R_2^2 + (l \sin(\theta_0))^2 - 2R_2 l \sin(\theta_0) \cos(\gamma) \end{cases} \quad (10)$$

L'angle δ se calcule à partir du théorème du sinus: $\frac{R_1}{\sin(\gamma)} = \frac{R_2}{\sin(\delta)}$. Le système (10) possède trois solutions physiquement correctes, analogues aux trois cercles obtenus en l'absence de frottement, qui permettent de réaliser les prédictions théoriques pour le rayon et les angles ϕ et θ . Lorsque la force dissipative n'a qu'une influence restreinte, ce qui est le cas lors des

expériences réalisées avec une masse métallique de 58.3 [g], les résultats de (8) et (10) pour le rayon de c_2 sont pratiquement identiques ; le second modèle est par contre indispensable lors de l'analyse de la stabilité des solutions circulaires, pour laquelle une précision importante est requise afin de démontrer l'existence d'un phénomène de convergence.

3.2 Stabilité

La stabilité des trois solutions circulaires citées plus haut peut être étudiée mathématiquement grâce aux équations du mouvement linéarisées. L'étude de la stabilité repose sur l'ajout d'une perturbation, représentée par une fonction $s_i(t)$, supposée relativement petite, à la solution particulière caractérisant le cercle. La solution circulaire considérée est exprimée par une fonction définie pour chacune des coordonnées grâce à (6), (7) ou (9) selon la situation étudiée, puis la perturbation y est ajoutée : on obtient $\theta(t) = \theta_0 + s_1(t)$ et $\phi(t) = \omega_0 t - \delta + s_2(t)$ pour le cercle externe, ou $\phi(t) = \pi + \omega_0 t + \delta + s_2(t)$ pour les deux autres cercles. Il est alors possible d'insérer ces expressions dans les équations du mouvement définies en (3) ; le système obtenu peut ensuite être linéarisé en effectuant un développement de Taylor d'ordre 1 autour de $s_i = 0$ pour les fonctions trigonométriques et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1. Cette opération rend possible l'écriture des équations sous forme matricielle, où les Λ_n correspondent aux coefficients de $s_i(t)$ dans le système linéarisé :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \dot{s}_1(t) \\ s_2(t) \\ \dot{s}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Lambda_1 & 0 & 0 & \Lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \Lambda_3 & \Lambda_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \dot{s}_1(t) \\ s_2(t) \\ \dot{s}_2(t) \end{pmatrix} \quad (11)$$

Lorsqu'une ou plusieurs valeurs propres de cette matrice ont une partie réelle positive, la perturbation croît exponentiellement, ce qui caractérise une situation instable. Un phénomène de divergence est alors observable : les trajectoires de la masse tendent à s'éloigner de l'orbite étudiée, et le système est hautement sensible aux conditions initiales. Une telle description correspond au cercle c_3 , pour lequel l'application numérique de la méthode ci-dessus indique que l'une des valeurs propres est positive, et qui n'est donc pas observable expérimentalement en raison de son instabilité.

Si toutes les valeurs propres sont purement imaginaires, le système ne présente ni divergence ni convergence ; les fonctions $s_i(t)$ correspondent à des exponentielles complexes, dont le comportement oscillatoire signifie que l'orbite étudiée est neutralement stable. Une telle situation correspond aux résultats obtenus grâce à l'application numérique de la méthode ci-dessus pour c_1 et c_2 en l'absence de force dissipative. Toutes les valeurs propres ont alors une partie réelle nulle, démontrant par conséquent la stabilité de ces solutions et confirmant les résultats de la simulation ainsi que l'observation expérimentale avec une masse suffisamment importante pour que le frottement de l'air soit très faible. Un changement se produit lorsque l'influence de la force de frottement entre en jeu. En effet, les parties réelles des valeurs propres calculées pour les cercles c_1 et c_2 deviennent négatives, caractérisant une situation asymptotiquement stable. Un phénomène de convergence se produit alors : les trajectoires avoisinantes tendent vers le cercle, ce qui lui confère les caractéristiques d'un attracteur du système. Ce comportement peut être mis en évidence par la simulation obtenue à partir des équations du mouvement ainsi que par l'expérience avec une masse plus légère. Il apparaît alors que seule la première partie de la trajectoire, avant la stabilisation, est dépendante des

conditions initiales. Selon la position initiale de la masse, cette dernière finit toujours par tendre vers l'une des deux trajectoires limites, c_1 ou c_2 ; à noter encore que c_2 , au niveau d'énergie le plus bas, est plus facilement atteignable et permet la plus grande stabilité. Lorsque le coefficient de frottement, et par conséquent la dissipation, augmentent, il devient de plus en plus difficile d'atteindre c_1 ; à partir d'une certaine valeur critique, le système (10) n'a plus qu'une solution, correspondant à c_2 , et les deux autres cercles disparaissent.

4. Application du théorème de Noether

Les deux solutions circulaires stables des équations du pendule constituent un domaine idéal d'application du théorème de Noether, énonçant que toute symétrie dans un système est liée à la présence d'une quantité conservée. En particulier, un lagrangien constant au cours du temps indique que l'énergie est conservée, ce qui est le cas lorsque le pendule décrit un cercle. En effet, le cercle en question se situant dans le plan horizontal, l'énergie potentielle est constante; de plus, la norme de la vitesse et par conséquent l'énergie cinétique reste inchangée, ce qui implique que le lagrangien est constant au cours du temps. La conservation de l'énergie sur le cercle signifie que le comportement de ce pendule est un exemple typique d'oscillateur forcé et amorti : à une première partie de la trajectoire convergeant vers le cercle et sensible aux conditions initiales, correspondant au régime transitoire, succède un état stable indépendant des conditions initiales et lors duquel il n'y a aucune perte d'énergie. La dissipation présente dans le régime transitoire est la cause du phénomène de convergence, au cours duquel la solution des équations du mouvement pour chaque coordonnée affiche des oscillations dont l'amplitude décroît exponentiellement, comme le prévoient les valeurs propres, avant de se stabiliser vers la valeur d'équilibre. Une fois l'état stable (cercle) atteint, l'énergie est conservée car toutes les pertes dues au frottement sont compensées par le travail fourni par le pivot. Le théorème de Noether appliqué à c_1 et c_2 permet ainsi d'interpréter physiquement la stabilité asymptotique de ces deux solutions particulières.

5. Résultats expérimentaux

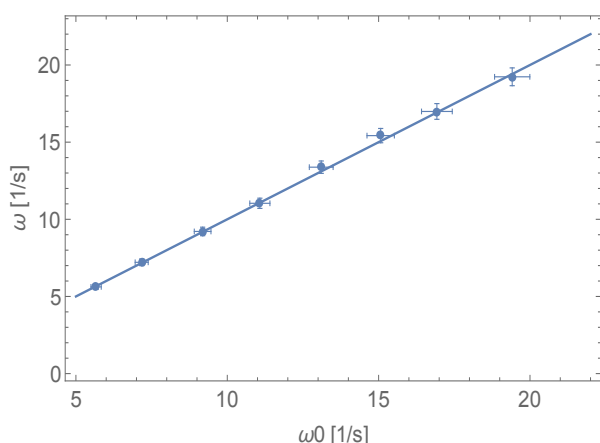


Fig. 5 : vitesse angulaire de la masse en fonction de ω_0 . Les mesures (points) vérifient l'égalité des périodes prédite en 3.1. La ligne continue représente la droite théorique de pente 1.

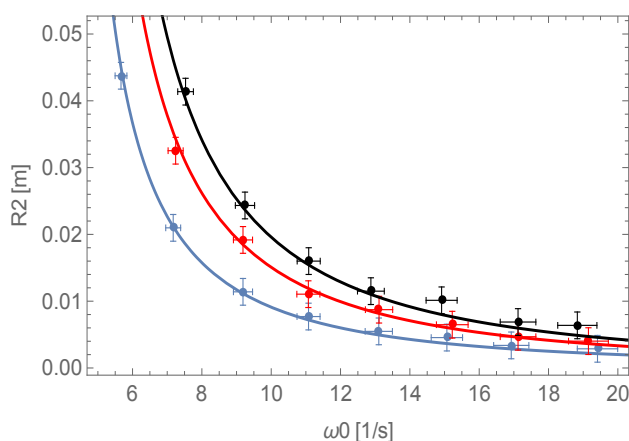


Fig. 6 : rayon du cercle c_2 en fonction de la vitesse angulaire du pivot, pour trois valeurs de R_1 . Courbe bleue : $R_1=0.053$ [m]. Courbe rouge : $R_1=0.087$ [m]. Courbe noire : $R_1=0.112$ [m]. Les résultats expérimentaux (points) vérifient les prédictions théoriques (courbes) obtenues en 3.1 [système (8)].

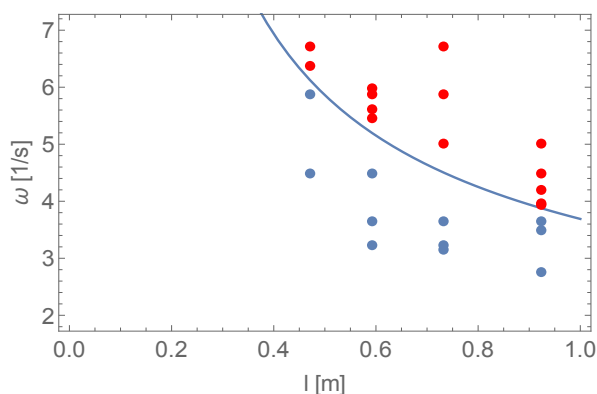


Fig. 7 : vérification de l'équation (9). Le cercle c_2 (points rouges) n'est observable qu'au-dessus d'une limite représentée par la courbe bleue. Les points bleus désignent le cercle c_1 . Le rayon R_1 est fixé à 0.087 [m].

Ces résultats ont été obtenus au moyen d'un pendule attaché à un moteur ; la vitesse angulaire de ce dernier, le rayon R_1 ainsi que la longueur du pendule étaient variables. Les trajectoires ont été filmées de dessous, puis analysées grâce au logiciel *Tracker*.

6. Discussion

Les résultats expérimentaux présentés ci-dessus sont en accord avec les prédictions théoriques réalisées pour le cercle c_2 évoqué dans l'énoncé. Le premier graphique illustre l'égalité des périodes de la masse et du pivot au cours du MCU, et valide ainsi l'hypothèse de départ du modèle mathématique décrivant les trajectoires circulaires. La prédiction pour R_2 avec très peu de frottement est confirmée par la fig. 6, où les courbes théoriques ont été réalisées à partir du système (8), dont les résultats sont quasiment identiques à ceux donnés par (10) pour une force dissipative relativement faible. Ce graphe présente une asymptote horizontale indiquant que R_2 tend vers 0 lorsque l'on augmente ω_0 . L'influence de R_1 sur R_2 y apparaît également. La troisième expérience réalisée vise à vérifier la limite inférieure pour ω_0 au-dessus de laquelle c_2 (et c_3) apparaissent. Là aussi, l'expérience s'accorde avec la théorie : pour quatre différentes longueurs, l'observation de c_2 n'est possible qu'au-dessus de ω_{min} , dont la valeur est représentée par la courbe bleue. Il convient de mentionner que c_1 , qui est l'unique cercle observable (et attracteur du système en présence de dissipation) en dessous de cette limite, existe toujours lorsque ω_0 dépasse ω_{min} ; cependant, comme je l'ai mentionné en section 3.2, il devient plus difficilement atteignable. A noter encore que bien que l'équation (7) ait été dérivée en l'absence de frottement, les valeurs obtenues pour ω_{min} constituent également une bonne approximation en présence d'une force dissipative relativement faible, ce qui est le cas lorsque le pendule se déplace dans l'air.

Bien que les résultats expérimentaux soient tout à fait représentatifs des prédictions théoriques, il convient de citer rapidement les quelques sources d'erreur ayant pu avoir une influence sur les mesures effectuées. Il s'agit principalement d'imprécision expérimentale lors des mesures de l et de R_1 , ainsi que d'incertitudes lors de l'analyse des vidéos. Les barres d'erreur présentes sur les graphiques proviennent d'estimations effectuées pour le niveau de précision des divers instruments et du logiciel *Tracker*.

7. Conclusion

L'objectif de cette recherche était d'étudier les trajectoires circulaires stables d'un pendule dont le pivot décrit un cercle horizontal. Les équations du mouvement de la masse ont pu être dérivées à partir du lagrangien du système ; la description mathématique des trois solutions

circulaires de ces équations, vérifiée par l'expérience, a également permis l'analyse de la stabilité de ces cercles. Il apparaît ainsi que deux trajectoires circulaires sont stables, et constituent des attracteurs du système en présence d'une force dissipative, alors que la troisième est instable ; l'apparition ou la disparition de certaines de ces solutions lors de variations des paramètres du système ont également pu être mises en évidence. Le simple fait de pouvoir observer c_1 et c_2 expérimentalement constitue une illustration de leur stabilité, qui peut être interprétée qualitativement grâce au théorème de Noether démontrant la conservation de l'énergie au cours de ces trajectoires. La présente recherche fournit donc une description généralisée du mouvement du pendule, ainsi qu'une investigation théorique et expérimentale des trajectoires particulières répondant à son objectif initial.

8. Références

- [1] R. Van Dooren, *Chaos in a Pendulum with Forced Horizontal Support motion : a tutorial*, 1996 : Chaos, Solitons & Fractals Vol. 7.
- [2] Gabriela González, *A pendulum with a moving support point*, 2006. Support de cours, Louisiana State University. URL : <http://www.phys.lsu.edu/faculty/gonzalez/Teaching/Phys7221/PendulumWithMovingSupport.pdf>
- [3] Tom Duncan, *Chaos theory*, Advanced Physics (John Murray, 2000), Fig. 25.33.
- [4] *Problems for the 29th IYPT 2016*, <http://iypt.org/images/e/ef/problems2016.pdf>
- [5] B. Anastasiou, V. del Duca, *Classical mechanics*, 2015 (support de cours de l'EPFZ).

Remerciements

Je tiens ici à remercier vivement Messieurs Vincent de Coulon, professeur de physique au Gymnase Auguste Piccard à Lausanne, et Eric Schertenleib, l'un des coaches de l'équipe suisse au IYPT, pour leurs suggestions et remarques constructives à la lecture d'une première version de cet article. Je remercie également Monsieur Samuel Byland qui m'a donné la possibilité de rédiger ce texte et de le publier.