

Brennweite einer Meniskuslinse

Martin Lieberherr

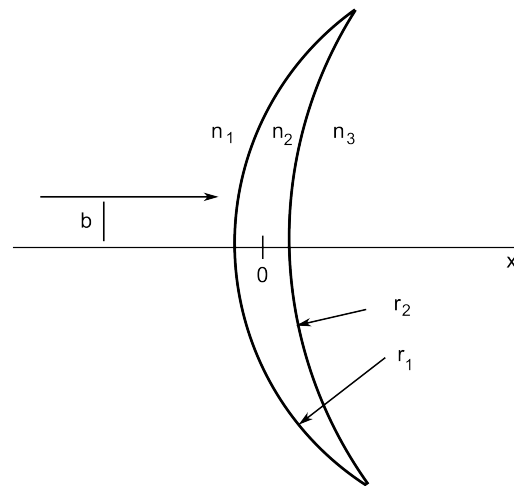
Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Letztes Jahr musste einer meiner Übungsstudenten in seiner Lektion optische Linsen behandeln. Ein Schüler fragte ihn, was mit der Brennweite passiere, wenn bei einer asymmetrischen Linse das Licht von der anderen Seite komme. Natürlich wusste der Student die Antwort nicht. Schaut man in der DMK/DPK-Formelsammlung die so genannte Linsenmacherformel nach, so sieht man sofort, dass vordere und hintere Brennweite gleich sind. Allerdings gilt die genannte Formel in der Formelsammlung nur, falls die Medien auf beiden Seiten der Linse denselben Brechungsindex haben. Wie lautet die Linsenmacherformel, wenn die Brechungsindizes verschieden sind? Als Beispiel wählte ich eine Meniskuslinse (Abb. 1), weil die Linse unsymmetrisch ist und ich altersweitsichtig werde.

Abbildung 1: Meniskuslinse

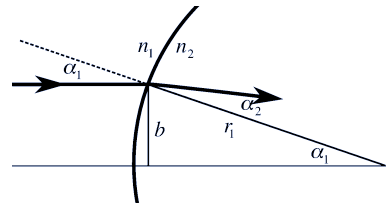
Eine konvexkonkave Sammellinse mit Krümmungsradien r_1 und r_2 aus Glas mit Brechungsindex n_2 befinde sich an der Grenze zweier Medien mit Brechungsindizes n_1 und n_3 . Die optische Achse x verläuft durch die zwei Krümmungsmittelpunkte. Der Nullpunkt, von dem aus die Brennweiten gemessen werden, befindet sich im Linseninnern. Ein Lichtstrahl falle im Abstand b von der opt. Achse auf die Linse.



Linsenmacherformel im asymmetrischen Fall

Ein Lichtstrahl verlaufe im Medium mit Brechungsindex n_1 parallel zur optischen Achse und treffe auf die konvexe Fläche der Linse mit Krümmungsradius r_1 (Abb. 1). Der Linsenkörper habe Brechungsindex n_2 . Im angrenzenden Medium mit Brechungsindex n_3 kreuze der zweimal gebrochene Strahl die optische Achse. Der Strahl verlaufe achsennah, dann können wir im Brechungsgesetz $\sin \alpha \approx \alpha$ setzen. Die Linse sei sehr dünn. So finden die Brechungen an Vorder- und Rückseite der Linse auf gleicher Höhe statt und wir müssen uns keine Gedanken machen, von wo aus wir die Brennweite messen.

Abbildung 2: Der einfallende Strahl falle im Abstand b von der optischen Achse unter dem Winkel α_1 auf die vordere Fläche der Linse, die Krümmungsradius r_1 hat. Brechungswinkel ist α_2 .



Der einfallende Strahl habe Abstand b von der optischen Achse. Dann ist der Einfallswinkel auf die konvexe Fläche $\alpha_1 = b/r_1$ (Abb. 2). Das Brechungsgesetz $n_1\alpha_1 = n_2\alpha_2$ liefert den ersten Brechungswinkel α_2 . Der Einfallswinkel bei der hinteren Linsenfläche ist $\beta_2 = b/r_2 + \alpha_2 - \alpha_1$ und der Brechungswinkel β_3 an der hinteren Fläche folgt dann aus $n_2\beta_2 = n_3\beta_3$. Der zweimal gebrochene Strahl läuft unter dem Winkel $b/r_2 - \beta_3$ zur optischen Achse und kreuzt diese im Abstand der hinteren Brennweite $f_3 = b/(b/r_2 - \beta_3)$. Mit etwas Algebra folgt für die Meniskuslinse:

$$\frac{1}{f_3} = \frac{n_2 - n_1}{n_3 r_1} - \frac{n_2 - n_3}{n_3 r_2} \quad (\text{hintere Brennweite})$$

Kommt das Licht von der anderen Seite (in Abb. 1 von rechts), so erhält man:

$$\frac{1}{f_1} = -\frac{n_2 - n_3}{n_1 r_2} + \frac{n_2 - n_1}{n_1 r_1} \quad (\text{vordere Brennweite})$$

Die vordere und hintere Brennweite einer Linse sind gleich, wenn die Materialien vor und hinter der Linse gleichen Brechungsindex haben ($n_1 = n_3$). Unterscheiden sich hingegen die Medien, z.B. bei Immersionsobjektiven oder Kontaktlinsen, so unterscheiden sich auch vordere und hintere Brennweite. Als extremes Beispiel wählen wir $n_3 = n_2$. Dann ist

$$\frac{1}{f_3} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 r_1} \quad \text{respektive} \quad \frac{1}{f_1} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 r_1}$$

Im normalerweise behandelten Fall, $n_1 = n_3$, folgt $f_3 = f_1 = f$ und die Linsenmacherformel für die konvexkonkave Linse:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

20. April 2011 / Martin Lieberherr